

INTÉGRATION

« Il ne faut pas uniquement intégrer. Il faut aussi désintégrer. C'est ça la vie. C'est ça la philosophie. C'est ça la science. C'est ça le progrès, la civilisation. »

La Leçon, Ionesco

Introduction historique : Au III^e siècle av. J.C., **Archimède** propose de calculer une surface ou un volume en sommant une multitude d'*indivisibles*. Ainsi, une sphère est considérée comme un empilement de lamelles circulaires très fines dont on somme les volumes élémentaires (imaginer une tomate coupée en fines tranches).

Les arabes puis l'occident moderne utiliseront cette méthode avec dextérité pour calculer de nombreuses aires et volumes. Mais les grandes avancées théoriques n'arriveront qu'au XVII^{ème} siècle avec Pascal, puis Newton et Leibniz. Il n'est pas étonnant de retrouver ici des grands noms du calcul différentiel : l'intégrale, comme le calcul différentiel entretient dès l'origine un lien très fort avec l'infiniment petit.

Newton (1642-1727) définit l'intégrale comme une dérivation à l'envers.

Leibniz (1646-1716) s'intéresse davantage à l'aspect sommatoire de l'intégrale comme une généralisation de la somme discrète $\sum$. Il introduit les notations actuelles :

$\int$ désigne un grand S comme « Somme » et dx désigne l'infiniment petit.

Le terme d'intégrale apparaît pour la première fois dans sa correspondance. Il énonce le théorème fondamental qui sera démontré par Cauchy au XIX^{ème}.

Ces deux approches complémentaires font la richesse de l'intégrale : c'est à la fois une aire (somme d'aires *élémentaires*) et une primitive (*contraire* de la dérivée).

C'est à partir de cette idée, que **Riemann** (1826-1866) – avec Cauchy – développera la première définition rigoureuse de l'intégrale.

Lebesgue (1875-1941) définit la théorie de la mesure grâce à laquelle on peut mesurer des objets infiniment petits. Le calcul d'aires s'en trouve révolutionné et donne naissance à l'intégrale de Lebesgue (pas à votre programme).

Remarque : contrairement à l'intitulé au programme, ce n'est pas exactement la construction de l'intégrale de Riemann qui vous est présentée ici. En particulier, notre cours se limite aux fonctions continues par morceaux pour éviter de se poser la question de l'intégrabilité.

Cependant, on pourrait sans difficultés généraliser un peu le propos de ce cours aux fonctions définies sur un segment et déterminer ainsi une classe de fonctions Riemann-intégrables plus large que les seules fonctions continues par morceaux (qui inclurait par exemple toutes les fonctions monotones, voire monotones par morceaux). On retrouverait alors, moyennant une construction un peu différente, la même théorie que celle introduite par Riemann pour son intégrale.

Notations : La mention du segment $[a, b]$ dans les définitions et théorèmes sous-entend que $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, avec $a < b$ (le segment contient au moins deux points).

1 LA CONTINUITÉ UNIFORME

Avant de parler d'intégration, commençons par une nouvelle notion liée à la continuité : la continuité uniforme.

La continuité traduit le concept de prévisibilité d'une application : chaque image par la fonction est égale à sa limite.

Ainsi, en un point a où f est continue, pour une marge d'erreur $\varepsilon > 0$ fixée, on sait qu'il existe une certaine distance $\eta > 0$ telle que $f(x)$ soit une bonne approximation de $f(a)$ à ε près, lorsque x est à une distance inférieure à η de a .

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x) \in I, |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

Cependant, si la fonction est continue en un autre point $b \in I$, la distance $\eta > 0$ valable pour a n'a aucune raison d'être valable pour b (où les variations peuvent être beaucoup plus rapides). En effet, η dépend de a . Les différentes continuités en chacun des points n'ont aucun lien entre elles.

C'est à cette lacune que pallie la notion d'uniforme continuité.

Pour qu'une fonction soit uniformément continue sur une partie I de $\mathbf{R}$, il faut non seulement qu'elle soit continue, mais que pour chaque $\varepsilon > 0$, on puisse trouver un $\eta > 0$ commun à tous les points de I .

D'un point de vue intuitif, on impose à ce que les variations de la fonction soient de même ordre autour de chacun des points.

Définition 1.1 (Continuité uniforme)

Soit f définie sur $I \subset \mathbf{R}$.

On dit que f est **uniformément continue sur** I si, et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, x') \in I^2, |x - x'| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(x')| \leq \varepsilon.$$

Le η est défini avant x et x' .

Propriété 1.2

Une fonction uniformément continue est continue, mais la réciproque est fautive en général.

Preuve

Le sens direct est immédiat.

Pour un contre-exemple, voir la fonction $\exp$ ci-dessous. ■

Exemple

Montrer qu'une fonction lipschitzienne est uniformément continue.

Solution :

Pour $k > 0$, si f est k -lipschitzienne sur I , alors pour $\varepsilon > 0$, on pose $\eta = \frac{\varepsilon}{k}$,

$$\forall (x, x') \in I^2, |x - x'| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(x')| \leq k |x - x'| \leq \varepsilon.$$

Exemple

Montrer que $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, 1]$, mais n'est pas lipschitzienne sur le segment.

Solution :

Soit $\varepsilon > 0$, on pose $\eta = \varepsilon^2 > 0$ et on considère $(x, x') \in [0, 1]^2$ tels que $|x - x'| \leq \eta$.

Quitte à échanger les rôles, on peut supposer $x' = x + h$ avec $h \in [0, \eta]$.

$$|\sqrt{x'} - \sqrt{x}| = \sqrt{x+h} - \sqrt{x}.$$

Si $h = 0$, la majoration par $\varepsilon > 0$ est évidente. On suppose donc que $h > 0$, alors

$$\sqrt{x+h} - \sqrt{x} = \frac{h}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \leq \frac{h}{\sqrt{h}} \leq \sqrt{h} \leq \sqrt{\eta} = \varepsilon.$$

Donc $x \mapsto \sqrt{x}$ est bien uniformément continue sur $[0, 1]$.

Montrons qu'elle n'est pas lipschitzienne.

En effet, si on considère $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, la limite tend vers $+\infty$ quand $x \rightarrow 0$, donc il

n'existe pas de constante $k > 0$ telle que $\forall (x, x') \in [0, 1]^2, |\sqrt{x} - \sqrt{x'}| \leq k |x - x'|$.

Exemple

Montrer que $x \mapsto e^x$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbf{R}$.

Solution :

On pose $\varepsilon = 1$.

Supposons par l'absurde que $\exp$ soit uniformément continue sur $\mathbf{R}$, alors il existe $\eta > 0$ tel que $\forall (x, x') \in \mathbf{R}^2, |x - x'| \leq \eta \Rightarrow |e^x - e^{x'}| \leq \varepsilon$.

En particulier pour $x' = n \in \mathbf{N}$ et $x = n + \eta$, on a $|e^x - e^{x'}| = e^{n+\eta} - e^n = e^n(e^\eta - 1)$.

Or $e^\eta - 1 > 0$ car $\eta > 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n(e^\eta - 1) = +\infty$ donc ne peut être majorée par ε .

C'est absurde, donc $\exp$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbf{R}$.

Exemple

$x \mapsto \frac{1}{x}$ est-elle uniformément continue sur $\mathbf{R}_+^*$?

Solution :

Si par l'absurde la fonction était uniformément continue, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, x') \in]0, +\infty[^2, |x - x'| \leq \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x'} \right| \leq \varepsilon.$$

Si on note $x' = x + h$, avec $h > 0$, alors on trouve $\left| \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \right| = \frac{h}{x(x+h)}$. Si on évalue en $x = h$, alors on trouve $\frac{h}{2h^2} = \frac{1}{2h} \leq \varepsilon$ pour $h \leq \eta$.

Mais si on pose $h > \min\left(\frac{1}{2\varepsilon}, \eta\right)$, alors $\frac{1}{2h} > \varepsilon$ ce qui est absurde.

Donc la fonction n'est pas uniformément continue sur $]0, +\infty[$.

Théorème 1.3 (Théorème de Heine)

Une fonction continue sur un segment est uniformément continue sur ce segment.

Preuve (Non exigible)

Idée : raisonnement par l'absurde et utiliser la caractérisation séquentielle pour faire intervenir Bolzano-Weierstrass.

Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbf{R})$ et supposons par l'absurde que f n'est pas uniformément continue sur $[a, b]$.

Ainsi, il existe $\varepsilon > 0$, tel que $\forall \eta > 0, \exists (x, x') \in [a, b]^2, |x - x'| \leq \eta$ et $|f(x) - f(x')| > \varepsilon$. En particulier, pour tout $n \in \mathbf{N}$, en posant $\eta = \frac{1}{2n}$, il existe $(x_n, x'_n) \in [a, b]^2$ tel que $|x_n - x'_n| \leq \frac{1}{2n}$ et $|f(x_n) - f(x'_n)| > \varepsilon$.

$(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée (par a et b), et d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge dans $[a, b]$. On note x sa limite.

Ainsi $\forall n \in \mathbf{N}, |x_{\varphi(n)} - x'_{\varphi(n)}| \leq \frac{1}{2\varphi(n)} \rightarrow 0$. Donc $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ converge également vers x .

Donc par passage des inégalités à la limite (f continue en x), on trouve

$$0 = |f(x) - f(x)| \geq \varepsilon.$$

C'est absurde. ■

Exemple

Montrer que si f est uniformément continue sur deux intervalles I et J tels que $I \cap J \neq \emptyset$, alors elle est uniformément continue sur $I \cup J$.

Montrer que cela ne s'étend pas au cas d'une union infinie de parties.

Solution :

On prend simplement le minimum entre les différents η trouvés pour chaque intervalle.

Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $\eta_1 > 0$ tel que

$$\forall (x, x') \in I^2, |x - x'| \leq \eta_1 \Rightarrow |f(x) - f(x')| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Et il existe $\eta_2 > 0$ tel que

$$\forall (x, x') \in J^2, |x - x'| \leq \eta_2 \Rightarrow |f(x) - f(x')| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On note alors $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$ et on considère $(x, x') \in I \cup J$ tel que $|x - x'| \leq \eta$.

- Si $(x, x') \in I^2$ ou $(x, x') \in J^2$, alors en utilisant $\eta \leq \eta_1$ ou $\eta \leq \eta_2$, on obtient directement $|f(x) - f(x')| \leq \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$.
- Supposons à présent que $x \in I \setminus J$ et $x' \in J \setminus I$. Si par exemple $x < x'$, si on pose $x_0 \in I \cap J$, alors $x \leq x_0 \leq x'$, donc $|x - x_0| \leq \eta \leq \eta_1$ et $|x' - x_0| \leq \eta \leq \eta_2$, donc en appliquant l'uniforme continuité sur I et sur J , on trouve

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x')| &= |f(x) - f(x_0) - (f(x') - f(x_0))| \\ &\leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x') - f(x_0)| \quad \text{inégalité triangulaire} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien montré que f est uniformément continue sur $I \cup J$.

Bien sûr, pour un nombre infini d'intervalles, il n'existe pas nécessairement de minimum, mais une borne inférieure qui peut valoir 0.

Par exemple $x \mapsto e^x$ est uniformément continue sur tout intervalle du type $[n, n+1]$ pour $n \in \mathbf{N}$ (d'après Heine).

Cependant, elle n'est pas uniformément continue sur $\mathbf{R}_+ = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} [n, n+1]$ (voir exemple plus haut).

Méthode

Pour montrer qu'une fonction est uniformément continue sur un domaine non majoré, on peut montrer qu'elle l'est au voisinage de $+\infty$ et « rajouter » ensuite un segment aussi grand que l'on souhaite.

On fait de même en $-\infty$.

Exemple

Montrer que $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbf{R}_+$.

Solution :

Sur $[1, +\infty[$, la fonction est 1-lipschitzienne (car sa dérivée est inférieure à 1) donc elle est uniformément continue.

Sur $[0, 1]$, elle est également uniformément continue (Heine).

Donc par union des deux intervalles, elle est uniformément continue sur $\mathbf{R}_+$.

2 INTÉGRALE D'UNE FONCTION EN ESCALIER

Les aires les plus simples à calculer sont les aires des rectangles. Si vous devez évaluer l'aire d'une figure ou sous une courbe, vous pouvez la tracer sur un papier quadrillé et compter le nombre de petit carrés qui composent la surface. Plus la taille des carrés sera petite, meilleure sera l'approximation.

C'est exactement ce que nous allons faire. Et dans un premier temps, pour simplifier, nous nous contentons de calculer les aires des fonctions qui suivent le quadrillage : les fonctions en escalier.

Ensuite, nous généraliserons en passant à la limite (quadrillage de plus en plus fin).

Remarque importante : Dans tout le chapitre nous travaillerons sur des **segments** de $\mathbf{R}$. Sauf quelques cas particuliers, il n'y aura pas d'intervalles infinis ou ouverts (car alors on n'est pas sûr que l'aire sous la courbe soit finie). Ce sera le programme de deuxième année.

Définition 2.1 (Subdivision d'un segment)

Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbf{R}$. On appelle **subdivision** de $[a, b]$ toute suite finie $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ avec

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$



Exemple (Subdivision à pas constant)

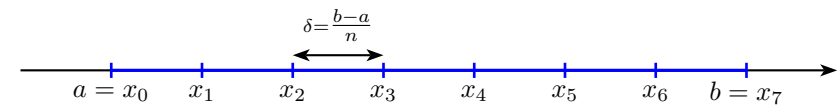
Lorsque le *pas* de la subdivision est constant :

$$\exists \delta > 0, \text{ tel que } \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k - x_{k-1} = \delta.$$

alors on dit que la subdivision est à pas constant (ou régulière).

Dans ce cas $\delta = \frac{b-a}{n}$ et $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, x_k = a + \frac{b-a}{n}k$.

δ s'appelle le **pas de la subdivision**.



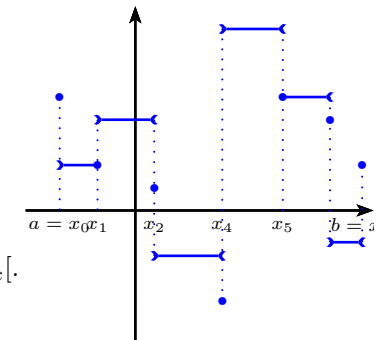
Définition 2.2 (Fonctions en escalier)

Une **fonction en escalier** sur $[a, b]$ est une application $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{K}$ telle que

- il existe une subdivision

$$\sigma = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ de } [a, b],$$

- $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, f$ est constante sur $]x_{k-1}, x_k[$.



On notera $\mathcal{E}([a, b], \mathbf{K})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ (notation non « officielle »).

⚠ L'application est constante sur chaque **ouvert** de la subdivision.

Propriété 2.3

$(\mathcal{E}([a, b], \mathbf{K}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

$(\mathcal{E}([a, b], \mathbf{K}), +, \times)$ est un anneau.

Les fonctions réelles et en escalier sur un segment sont bornées.

Preuve

Il faut bien penser que deux fonctions en escalier n'ont pas la même subdivision. Mais pour une fonction donnée, si on rajoute des points à sa subdivision, cela donne une nouvelle subdivision qui convient encore. L'idée est donc de compléter une subdivision par les points de l'autre.

On montre que $\mathcal{E}([a, b], \mathbf{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^{[a, b]}$:

(non vide) contient l'application nulle.

(produit - externe) Si $f, g \in \mathcal{E}([a, b], \mathbf{K})$, $\lambda \in \mathbf{K}$, alors $\lambda f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbf{K})$ (avec la même subdivision).

(somme) Si $f, g \in \mathcal{E}([a, b], \mathbf{K})$, alors il existe deux subdivisions σ_f et σ_g associées.

On construit une nouvelle subdivision σ par récurrence finie, avec

- $x_0 = a$,
- $\forall k \geq 1$, si $x_k = b$ alors la subdivision est faite,
sinon on pose $x_{k+1} = \min(\sigma_f \cup \sigma_g) \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$
Dans cette écriture, on identifie les n -uplets avec les ensembles de leurs éléments.

Ainsi σ est une subdivision adaptée à $f + g$, donc $f + g \in \mathcal{E}([a, b], \mathbf{K})$

Le reste de la proposition est simple à démontrer (pour la stabilité par produit, on procède de la même manière). ■

Définition 2.4 (Intégrale)

Soit $f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbf{K})$, et $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f .

On définit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ tels que¹

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, f|_{]x_k, x_{k+1}[} = \lambda_k.$$

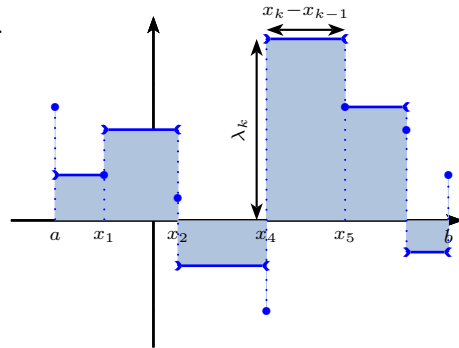
L'intégrale de f sur $[a, b]$ est définie par

$$\int_a^b f = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \lambda_k.$$

Par convention

- si $a = b$, alors $\int_a^a f = 0$.
- $\int_a^b f = - \int_b^a f$.

Cette valeur est indépendante de la subdivision choisie

**Explications**

Cette définition correspond exactement à l'aire algébrique entre la courbe et l'axe des abscisses car on fait simplement la somme des aires des rectangles : largeur $\times$ hauteur. Les points « isolés » n'ont aucune influence sur le calcul de l'aire.

Rappelez-vous : L'intégrale est une somme.

Preuve

Montrons que deux subdivisions différentes donnent la même intégrale.

On note donc σ et σ' deux subdivisions adaptées à f .

On pose alors $\gamma = \sigma \cup \sigma'$ et on montre que γ et σ définissent la même intégrale.

On note $\gamma = x_1, \dots, x_n$ et $\sigma = x_{\varphi(1)}, \dots, x_{\varphi(p)}$ avec $\varphi : \llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$ strictement croissante telle que $\varphi(1) = 1$ et $\varphi(p) = n$.

On pose $I = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \lambda_k$ l'intégrale associée à la subdivision γ ,

et $J = \sum_{k=0}^{p-1} (x_{\varphi(k+1)} - x_{\varphi(k)}) \mu_k$ l'intégrale associée à la subdivision σ .

$$\begin{aligned} \text{Alors } I &= \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \lambda_k = \sum_{j=1}^{p-1} \sum_{k=\varphi(j)}^{\varphi(j+1)-1} (x_{k+1} - x_k) \lambda_k \\ &= \sum_{j=1}^{p-1} \mu_j \sum_{k=\varphi(j)}^{\varphi(j+1)-1} (x_{k+1} - x_k) \\ &= \sum_{j=1}^{p-1} \mu_j (x_{\varphi(j+1)} - x_{\varphi(j)}) \\ &= J. \end{aligned}$$

De même pour J' l'intégrale associée à σ' , on a $J' = I$. Donc $J = J'$. ■

Notation

L'intégrale peut se noter :

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x) dx = \int_{[a, b]} f.$$

⚠ Pour $a \leq b$, $\int_b^a f = - \int_{[a, b]} f$.

Remarque :

Le choix de la variable d'intégration est arbitraire comme l'indice dans une somme :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$$

1. En identifiant la constante λ_k avec l'application constante de valeur λ_k sur $]x_{k-1}, x_k[$

Théorème 2.5 (*Propriétés de l'intégrale*)

Soit $(f, g) \in \mathcal{E}([a, b], \mathbf{K})$, $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$ et $c \in [a, b]$.

1. **Linéarité** : $\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$

2. **Relation de Chasles** : $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$

3. **Inégalité triangulaire** : $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$

Soit $(f, g) \in \mathcal{E}([a, b], \mathbf{R})$,

1. **Positivité** : Si $f \geq 0$ (et si $a \leq b$), alors $\int_a^b f \geq 0.$

2. **Positivité stricte** : Si $f > 0$ sur I sauf en un nombre fini de points et si $a < b$, alors $\int_a^b f > 0.$

3. **Croissance de l'intégrale** : Si $f \leq g$, et $a \leq b$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g.$

Preuve

- La linéarité provient de celle de la somme en choisissant une subdivision adaptée à f , g et $\lambda f + \mu g$ (ce qui est possible avec l'union des trois subdivisions par exemple).
- On ajoute simplement le point c à la subdivision.
Si $c > b$, cela revient à ajouter puis retirer la même quantité ; de même si $c < a$.
- L'inégalité triangulaire s'obtient à partir de celle de la somme (on remarque qu'une subdivision adaptée à f l'est aussi à $|f|$).
- Somme de termes positifs.
- On considère une subdivision qui contient les points d'annulation. Avec les notations plus haut, il existe alors $\lambda_k > 0$, et en ajoutant des termes positifs, on trouve donc une somme strictement positive.
- $g - f \geq 0$, et on utilise la positivité.

■

⚠ Dans les trois dernières propriétés, les réciproques sont fausses.

Exercice

Trouver des contre-exemples pour chacune des réciproques des trois dernières propriétés.

3 INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE SUR UN SEGMENT**A Définition de l'intégrale**

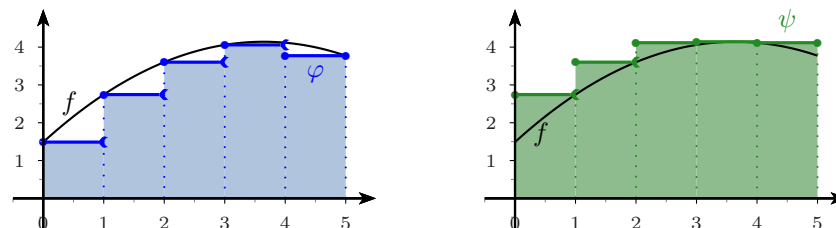
On veut étendre la définition de l'intégrale aux fonctions continues sur un segment. L'idée est donc de montrer qu'avec un « quadrillage » suffisamment fin, on arrive à avoir une approximation arbitrairement précise d'une fonction continue sur un segment par une fonction en escalier.

Ainsi, on pourra considérer l'intégrale d'une fonction continue sur un segment comme limite d'intégrales sur des fonctions en escalier.

Propriété 3.1

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists (\varphi, \psi) \in \mathcal{E}([a, b], \mathbf{R})$, tel que

$$\varphi \leq f \leq \psi \quad \text{et} \quad 0 \leq \int_a^b (\psi - \varphi) \leq \varepsilon.$$

**Preuve**

- On crée une subdivision σ_n à pas constant : $\frac{b-a}{n}$.
- On crée la fonction en escalier φ à partir de la subdivision en prenant sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}[$: $\varphi|_{[x_i, x_{i+1}[} = \lambda_i = \min_{[x_i, x_{i+1}[} f$ (ce qui est possible d'après le théorème des bornes atteintes), et pour $\varphi(b)$ on choisit $\varphi(b) = f(b)$ par exemple (aucune influence).
- On fait de même avec le maximum pour ψ en posant $\varphi|_{[x_i, x_{i+1}[} = \lambda'_i = \max_{[x_i, x_{i+1}[} f$.
- f est continue sur le segment $[a, b]$, donc uniformément continue sur ce segment (Heine).
Pour $\varepsilon > 0$, il existe donc $\eta > 0$ tel que

$$\forall (x, x') \in [a, b]^2, |x - x'| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(x')| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

En posant $n \in \mathbf{N}^*$, tel que $\frac{1}{n} \leq \eta$, on obtient donc la subdivision σ_n telle que $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\lambda'_i - \lambda_i \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Ainsi

$$\int_a^b (\psi - \varphi) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} (\lambda'_i - \lambda_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon.$$

■

Théorème 3.2

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$.

On note

$$I_f = \left\{ \int_a^b \varphi \quad \text{avec } \varphi \in \mathcal{E}([a, b]; \mathbf{R}) \text{ tel que } \varphi \leq f \right\}.$$

$$S_f = \left\{ \int_a^b \psi \quad \text{avec } \psi \in \mathcal{E}([a, b]; \mathbf{R}) \text{ tel que } f \leq \psi \right\}.$$

I_f admet une borne supérieure, et I_s admet une borne inférieure et

$$\sup I_f = \inf S_f.$$

On note $I = \sup I_f = \inf S_f$ cette valeur commune.

Preuve

Si on note ψ_0 la fonction constante égale à $\max_{x \in [a, b]} f(x)$ et φ_0 avec le minimum (existent d'après le théorème des bornes atteintes).

Alors, pour toute fonction en escalier φ telle que $\varphi \leq f$, on a $\varphi \leq \psi_0$.

Par croissance de l'intégrale, on a donc $\int_a^b \varphi \leq \int_a^b \psi_0$.

I_f est non vide (avec $\int_a^b \varphi_0$) et majorée (avec $\int_a^b \psi_0$) donc admet une borne supérieure dans $\mathbf{R}$.

De même pour S_f qui admet une borne inférieure.

Par croissance de l'intégrale, si $\varphi \leq f \leq \psi$, alors $\int_a^b \varphi \leq \int_a^b \psi$. Donc $\sup(I_f) \leq \inf(S_f)$. De plus, d'après le théorème précédent, pour tout $\varepsilon > 0$, $\inf S_f - \sup I_f \leq \varepsilon$.

Donc $\inf S_f = \sup I_f$. ■

Définition 3.3 (*Intégrale d'une fonction continue*)

Avec les notations du théorème précédent,

$$\int_a^b f = I.$$

On note $\int_b^a f = - \int_a^b f$.

B Propriétés de l'intégrale**Théorème 3.4** (*Propriétés de l'intégrale*)

Soient $(f, g) \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$, $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$ et $c \in [a, b]$.

$$1. \text{ Linéarité : } \int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

$$2. \text{ Relation de Chasles}^2 : \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

$$3. \text{ Inégalité triangulaire : } \left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

$$4. \text{ Positivité : Si } f \geq 0 \text{ (et si } a \leq b), \text{ alors } \int_a^b f \geq 0.$$

$$5. \text{ Comparaison : si } f \leq g, \text{ et } a \leq b, \text{ alors } \int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Preuve

Ce sont les propriétés de l'intégrale sur les fonctions en escalier par passage à la limite. ■

Propriété 3.5 (*Positivité stricte*)

Soit $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$.

Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$ et $f > 0$ en au moins un point, alors

$$\int_a^b f > 0.$$

⚠ L'hypothèse $a < b$ est indispensable. Le résultat est faux si $a = b$.

Preuve

On suppose $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) > 0$.

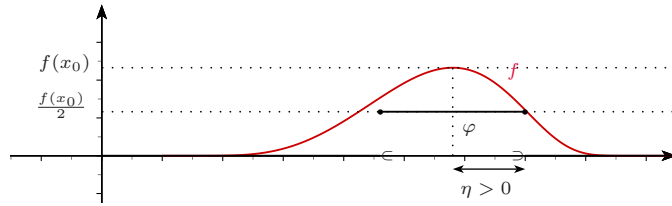
Il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [a, b] \cap [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$, $f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2}$.

Or $[a, b] \cap [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$ est un intervalle de longueur non nulle³. On note donc $d > 0$ sa longueur.

On définit à l'aide de la fonction indicatrice, la fonction $\varphi = \frac{f(x_0)}{2} \mathbf{1}_{[a, b] \cap [x_0 - \eta, x_0 + \eta]}$.

2. La relation est également valable si $c \notin [a, b]$, quand f est continue « jusqu'à » c .

3. En général il est de longueur 2η si η est suffisamment petit et que x_0 n'est pas un bord, mais dans les autres cas, une simple disjonction montre qu'on a toujours une longueur strictement positive.



C'est une fonction en escalier qui minore f donc par définition

$$\int_a^b f \geq \int_a^b \varphi = d \times \frac{f(x_0)}{2} > 0.$$

Exemple (Inégalité triangulaire)

⚠ En général, l'inégalité est stricte. Ainsi par exemple : $\int_0^{2\pi} \sin t \, dt = 0$ mais $\int_0^{2\pi} |\sin t| \, dt = 4$.

Remarque : On pourrait aussi utiliser ces propriétés pour donner une définition équivalente de l'intégrale sans passer par les fonctions en escalier.

La définition est plus *simple*, mais aussi plus abstraite :

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$,

On définit l'intégrale de f sur $[a, b]$ par l'unique réel $\int_a^b f$ tel que l'intégrale vérifie :

1. *Linéarité* : $\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$.
2. *Positivité* : Si $f \geq 0$ (et si $a \leq b$), alors $\int_a^b f \geq 0$.
3. $\int_a^b 1 = b - a$.
4. *Relation de Chasles* : Si $c \in [a, b]$, alors $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

On remarque que l'on retrouve alors une définition d'une surface similaire à celle qui nous avait servi pour le déterminant.

L'additivité des aires avec la linéarité et Chasles, le choix d'une surface de référence avec l'intégrale de 1, et l'antisymétrie avec la positivité.

Théorème 3.6

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R}_+)$ à valeurs **positives**,

$$\int_a^b f = 0 \quad \text{si et seulement si } f \text{ est nulle sur } [a, b].$$

Remarque : Le résultat reste évidemment valable si f est continue et de signe constant.

Preuve

C'est simplement une reformulation de la stricte positivité.

Remarque : dans les exercices ou sujets de concours, on peut la démontrer plus facilement en utilisant le théorème fondamental de l'analyse qui sera vu plus loin (raison pour laquelle il n'est pas utilisé ici). ■

Théorème 3.7 (Majoration d'un intégrale)

Soient $f, g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$,

$$\left| \int_a^b gf \right| \leq \left(\sup_{[a, b]} |g| \right) \times \int_a^b |f|.$$

$$\left| \int_a^b f \right| \leq (b - a) \sup_{[a, b]} |f|.$$

Preuve

1. D'après l'inégalité triangulaire : $\left| \int_a^b gf \right| \leq \int_a^b |fg|$.

Le théorème des bornes atteintes appliqué à g sur le segment $[a, b]$ (car g continue) donne que $\sup_{[a, b]} |g|$ est bien défini. Donc $\forall x \in [a, b], |(fg)(x)| \leq \sup_{[a, b]} |g| \cdot |f(x)|$.

La croissance de l'intégrale et sa linéarité permettent alors de conclure.

2. Idem, d'après l'inégalité triangulaire : $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$.

D'après le théorème des bornes atteintes appliqué sur le segment $[a, b]$ (car f continue) : $\sup_{[a, b]} |f|$ est bien défini. Donc $\forall x \in [a, b], |f(x)| \leq \sup_{[a, b]} |f|$.

La croissance de l'intégrale et sa linéarité permettent alors d'écrire

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \sup_{[a, b]} |f| \cdot \int_a^b 1 = (b - a) \sup_{[a, b]} |f|.$$

Explications

On peut interpréter facilement ces inégalités sur les sommes finies (cela est justifié par la définition de l'intégrale à partir des fonctions en escalier) :

Si, au lieu de f, g , on choisit des familles $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ et $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$, alors, d'après l'inégalité triangulaire

$$\left| \sum_{k=1}^n \lambda_k \mu_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |\lambda_k \mu_k| \leq \sum_{k=1}^n |\lambda_k| \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |\mu_i| \leq \left(\max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |\mu_i| \right) \sum_{k=1}^n |\lambda_k|.$$

De même,

$$\left| \sum_{k=1}^n \lambda_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |\lambda_k| \leq \sum_{k=1}^n \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |\lambda_i| \leq n \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |\lambda_i|.$$

Théorème 3.8 (*Valeur moyenne d'une fonction*)

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$, $\exists c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f = f(c).$$

$f(c)$ est appelé la **valeur moyenne** de f sur $[a, b]$.

Explications

Si on interprète sur les sommes finies, cela correspond à la valeur moyenne : $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \lambda_k$.

Dans le cas discret, il n'y a aucune raison qu'il soit atteint par un des λ_k , par contre, les valeurs de λ_k ne peuvent pas être toutes plus grandes ou toutes plus petites que la moyenne : il y en a des plus grandes et des plus petites. La différence avec les applications continues est que nous ne disposons pas de théorème des valeurs intermédiaires pour atteindre la moyenne.

Preuve

Si on pose $m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$, et $g : x \mapsto f(x) - m$, alors $\int_a^b g = 0$.

Si g était de signe constant, par exemple positive et ne s'annulait pas, alors $\int_a^b g > 0$. C'est absurde.

Donc g s'annule (ou change de signe, auquel cas elle s'annule d'après le théorème des valeurs intermédiaires). Donc $\exists c \in]a, b[$ tel que $g(c) = 0$. Donc $\frac{1}{b-a} \int_a^b f = f(c)$. ■

Exemple (*classique*)

Si $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$ tel que $\int_a^b f = 0$, alors f s'annule au moins une fois sur $[a, b]$.

Solution :

Simplement le théorème de la valeur moyenne !

Exemple

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 t^n f(t) dt$.

Solution :

f est continue sur le segment $[a, b]$, donc elle est bornée (théorème des bornes atteintes). Donc il existe $M \geq 0$ tel que $\forall x \in [0, 1]$, $|f(x)| \leq M$.

Donc

$$\left| \int_0^1 t^n f(t) dt \right| \leq \int_0^1 |t^n f(t)| dt \leq \int_0^1 t^n M dt = \frac{M}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 t^n f(t) dt = 0$.

⚠ En général on ne peut pas intervertir entre les limites et le signe intégral :

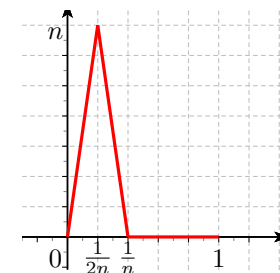
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx \neq \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx.$$

Par exemple si on pose

$$\forall n \geq 1, f_n(x) : x \mapsto \begin{cases} 2n^2 x & \text{si } x \leq \frac{1}{2n} \\ -2n^2(x - \frac{1}{2n}) + n & \text{si } \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors $\forall x \in [0, 1]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$,

$$\text{mais } \forall n \in \mathbf{N}^* \int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2}.$$



Des théorèmes d'interversion entre limite et intégrale seront étudiés en deuxième année.

4 INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE PAR MORCEAUX

On généralise ce que nous avons vu sur les fonctions continues, aux fonctions qui sont continues par morceaux.

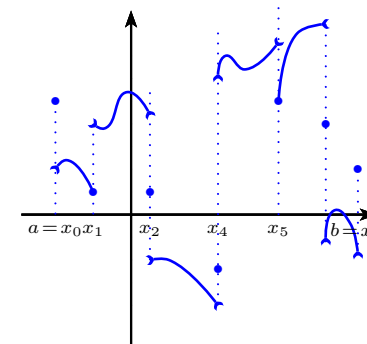
Définition 4.1 (*Fonctions continues par morceaux*)

Une **fonction continue par morceaux** sur $[a, b]$ est une application $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ telle que

- il existe une subdivision

$$\sigma = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ de } [a, b],$$

- $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,
 - $f|_{[x_k, x_{k+1}[}$ est continue,
 - $f|_{[x_k, x_{k+1}[}$ est prolongeable par continuité aux bornes (c-à-d : admet des **limites finies**).



On note souvent $f \in \mathcal{C}_{m,x}([a, b])$ ou $\mathcal{CM}([a, b])$.

Exemple

- Si f est continue sur $[a, b]$, alors elle est continue par morceaux sur $[a, b]$. La réciproque est fausse.

- $\begin{cases} [0, 1] & \rightarrow \mathbf{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{x} & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$ n'est pas continue par morceaux.
- $\begin{cases} [0, 1] & \rightarrow \mathbf{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\sin x}{x} & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$ est continue par morceaux.
- $\begin{cases} [0, 1] & \rightarrow \mathbf{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } \sin \frac{1}{x} \leq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$ n'est pas continue par morceaux.

Propriété 4.2

$\mathcal{C}_{mx}([a, b], \mathbf{R})$, muni des opérations usuelles est un espace vectoriel.
 $\mathcal{C}_{mx}([a, b], \mathbf{R})$ est stable par produit.
 Les applications continues par morceaux sur un segment sont bornées.

Preuve

La stabilité se montre comme pour les fonctions en escalier.
 Pour le caractère borné, on utilise le théorème des bornes atteintes sur les fonctions prolongées dans chaque segment de la subdivision. ■

Définition 4.3 (Fonction continue par morceaux sur un intervalle)

Une fonction est continue par morceaux sur un intervalle I si, et seulement si sa restriction à tout segment de I est continue par morceaux.

Définition 4.4 (Intégrale d'une fonction continue par morceaux)

Soient $f \in \mathcal{C}_{mx}([a, b], \mathbf{R})$, et $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée à f .
 On définit l'intégrale de f sur $[a, b]$ par

$$\int_a^b f = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f_k$$

avec f_k la prolongée (par continuité) de $f|_{]x_k, x_{k+1}[}$ sur le segment $[x_k, x_{k+1}]$

Explications

L'intégrale de f sur $[a, b]$ est égale à la somme des intégrales des parties continues de f .

Remarque : Cela ne dépend pas du choix de la subdivision dès lors qu'elle est *adaptée* à f (c'est-à-dire tant que f est continue sur les intervalles $]x_k, x_{k+1}[$).

Propriété 4.5

Les propriétés vues pour les intégrales des fonctions continues restent vraies pour les fonctions continues par morceaux,
⚠ à l'exception du théorème de la valeur moyenne et de la stricte positivité qui **ne sont** valables.

Pour comprendre :

Le théorème de la valeur moyenne et celui de la stricte positivité (tel qu'énoncé dans ce cours) sont tributaires de la valeur de la fonction en un unique point. Or, avec les fonctions continues par morceaux, on voit que changer la valeur de la fonction en un nombre fini de points ne modifie pas l'intégrale. Ainsi, les propriétés adaptées aux fonctions continues par morceaux ne peuvent pas s'appuyer sur la valeur de la fonction en un unique point (ou un nombre fini de points). Au contraire, pour les fonctions continues, dès que la valeur en un point est modifiée (sous réserve que le segment contienne au moins deux points), la fonction est alors nécessairement modifiée en un nombre infini de point et son intégrale est également modifiée localement.

Exemple

Trouver un contre exemple au théorème de la valeur moyenne pour une fonction continue par morceaux.

5 LE THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ANALYSE

Théorème 5.1 (Théorème fondamental de l'analyse)

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{R})$, $[a, b] \subset I$,

$x \mapsto \int_a^x f$ est la seule primitive de f sur $[a, b]$ qui s'annule en a .

Autre formulation :

$x \mapsto \int_a^x f$ est dérivable sur $[a, b]$ de dérivée f .

Ce théorème assure l'existence d'une primitive (et donc d'une infinité) pour toute fonction continue sur un segment et il en donne une expression.

Preuve

Soit $x \in [a, b]$.

On pose $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, et on calcule son taux d'accroissement :

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f - \int_a^x f \right) = \frac{1}{h} \left(\int_x^{x+h} f \right) \quad (\text{relation de Chasles})$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| &= \left| \frac{1}{h} \left(\int_x^{x+h} f \right) - f(x) \right| \\ &= \left| \frac{1}{h} \left(\int_x^{x+h} f(t) - f(x) dt \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{h} \left(\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt \right) \quad (\text{in. triangulaire}) \end{aligned}$$

Si $h < 0$, on inverse les bornes de l'intégrale pour l'inégalité triangulaire, mais le raisonnement reste identique.

Or f est continue en x , donc $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $|t - x| \leq \eta \Rightarrow |f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$.

Donc pour $|h| \leq \eta$,

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| \leq \frac{1}{h} \left(\int_x^{x+h} \varepsilon dt \right) \leq \varepsilon.$$

Enfin $\int_a^a f = 0$.

Pour l'unicité, la démonstration a déjà été vue lors du chapitre sur les primitives. ■

Corollaire 5.2

Si f est continue sur $[a, b]$, alors f admet une primitive F sur $[a, b]$ et $\forall (x, y) \in [a, b]^2$,

$$\int_x^y f = F(y) - F(x).$$

Exemple

$f : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$ est dérivable sur $\mathbf{R}$, sa dérivée est $x \mapsto e^{-x^2}$

On en déduit que $g : x \mapsto \int_x^{x^2} e^{-t^2} dt$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que sa dérivée est $x \mapsto 2x e^{-x^4} - e^{-x^2}$.

Corollaire 5.3

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbf{R})$,

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

⚠ Soyez bien attentif à la différence entre le théorème fondamental 5.1 et son corollaire 5.3.

Dans le théorème 5.1 :

- **hypothèse** : on exige que la fonction soit continue
- **conclusions** : on obtient que
 - L'intégrale est dérivable,

- Sa dérivée est une valeur : $f'(x)$. Cela ne dépend pas du point a , car la dérivée est une notion *locale*, sans mémoire de ce qui se passe plus loin.

En revanche, dans le corollaire 5.3 :

- **hypothèse** : on exige que la fonction soit de classe $\mathcal{C}^1$ et pas seulement continue. On calcule l'intégrale de la dérivée, c'est donc la dérivée qui doit être continue et pas seulement la fonction.
- **conclusion** : on obtient la valeur de l'intégrale, c'est une différence. Elle dépend de deux bornes car l'intégrale est une surface qui dépend à la fois du point de départ et de celui d'arrivée.

Exemple (Approfondissement)

On pose $f : x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \in]0, 1]$ et $f(0) = 0$.

f est continue sur $[0, 1]$, $\forall x \in]0, 1]$, $f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ et $f'(0) = 0$ (obtenu par limite du taux d'accroissement).

Ainsi f est dérivable sur $[0, 1]$, par contre, on peut voir que f' est non bornée (donc non continue par morceaux, et plus généralement, on ne peut pas la majorer par une fonction en escalier) donc n'admet pas d'intégrale au sens de ce cours.

On observe ainsi une limitation assez fâcheuse de cette théorie, toute dérivée n'est pas nécessairement intégrable et on n'a donc **pas** en général : $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt$.

6 FORMULES DE TAYLOR AVEC RESTE INTÉGRAL

A Rappel - Deux méthodes de calcul

Théorème 6.1 (Intégration par parties)

Si u et v sont deux applications $\mathcal{C}^1([a, b], \mathbf{K})$, alors

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = \left[u(x)v(x) \right]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b u(t)v'(t) dt.$$

Preuve

$(uv)' = u'v + uv'$, donc uv est une primitive de $u'v + uv'$ qui est continue sur $[a, b]$ (car $u, v \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbf{K})$)

Donc $\int_a^b u'v + uv' = [uv]_a^b$,

Avec la linéarité on obtient donc la formule voulue ■

Théorème 6.2 (Le changement de variable)

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{K})$, a, b deux points de I et $u \in \mathcal{C}^1([a, b], I)$

Alors

$$\int_a^b u'(t)(f \circ u)(t) dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t) dt.$$

Preuve

Pour la preuve, il suffit de voir que nous avons à faire à une **composition** de fonctions.

Pour cela, je “rends sa liberté à b ” (que je vais appeler x pour plus de commodité).

On pose $F(x) = \int_a^x u'(t)(f \circ u)(t)dt$ et $G(x) = \int_{u(a)}^{u(x)} f(t)dt$

Alors $F'(x) = G'(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, donc $F - G$ est une constante.

Et $(F - G)(a) = 0$ donc $F = G$ ■

Exemple (Rappel)

Montrer que si f est continue et T -périodique sur $\mathbf{R}$, alors $\int_a^{a+T} f$ ne dépend pas de a

Exemple (Rappel)

Primitives de fractions rationnelles du type $\int_a^x \frac{dt}{t^2 + \alpha}$ selon le signe de α .

B Formules de Taylor

Commençons par un rappel sur les formules de Taylor que nous connaissons.

Formule de Taylor exacte sur les polynômes⁴

Soit $P \in \mathbf{R}[X]$, soit $a \in \mathbf{R}$,

$$\forall x \in \mathbf{R}, P(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

(on sait que la somme finie).

Formule de Taylor-Young

Ici, on s'inspire de l'égalité de Taylor sur les polynômes pour approximer une fonction suffisamment régulière par une fonction polynomiale. Bien évidemment, ce n'est qu'une approximation et on perd donc l'égalité parfaite ce qui nous conduit à rajouter un terme d'erreur sous la forme d'un petit « o » : c'est une approximation **locale**.

Pour I un intervalle non réduit à un point, si $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{R})$ alors⁵ pour tout $a \in I$

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Formule de Taylor avec reste intégrale.

L'idée est ici d'obtenir une valeur explicite pour le petit « o ».

On avait obtenu la formule de Taylor grâce à des intégrations successives de développements limites, et il est donc naturel de chercher ce petit « o » sous une

4. On a l'égalité des polynômes, mais ici c'est l'aspect analytique qui nous intéresse, donc on travaille avec la fonction polynomiale associée.

5. Il suffit de supposer que $f \in \mathcal{D}^n(I, \mathbf{R})$, mais le programme la mentionne pour $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{R})$.

forme intégrale.

Le corollaire du théorème fondamental de l'analyse le donne à l'ordre 0 :

Si $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbf{R})$, alors pour tout $a \in I$ et tout $x \in I$

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt.$$

Si on suppose $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbf{R})$, alors on peut sortir un nouveau terme par intégration par parties : $\forall t \in I$, on pose

$$\begin{aligned} u(t) &= t & v(t) &= f'(t) \\ u'(t) &= 1 & v'(t) &= f''(t) \end{aligned}$$

on obtient donc

$$f(x) = f(a) + [tf'(t)]_a^x - \int_a^x tf''(t) dt = f(a) + xf'(x) - af'(a) - \int_a^x tf''(t) dt.$$

Ce n'est pas tout à fait ce qu'on veut car le terme en $xf'(x)$ est en trop, mais on peut l'éliminer rapidement en remplaçant $u(t) = t$ par $u(t) = t - x$ qui est une autre primitive de 1 et l'intégration par parties donne

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-t)f''(t) dt.$$

Si on recommence en supposant $f \in \mathcal{C}^3(I)$, on trouve alors

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2}f'''(t) dt.$$

La formule peut alors être facilement généralisée :

Théorème 6.3 (Formule de Taylor avec reste intégral)

Soit I un intervalle et $a \in I$.

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbf{R})$,

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

Preuve

Par récurrence sur n avec une intégration par parties. ■

Corollaire 6.4 (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b], \mathbf{R})$, soit $x \in [a, b]$,

$$\forall x \in [a, b], \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [a, b]} |f^{(n+1)}(t)|.$$

Preuve

Immédiat en majorant l'intégrale de la formule précédente (on remarque que le sup est bien défini et que c'est un maximum d'après le théorème des bornes atteintes sur le segment). ■

Ce corollaire permet de retrouver Taylor-Young et donne un majorant explicite du petit « o », mais il exige des hypothèses plus fortes sur la régularité de la fonction que celles de la formule de Taylor-Young.

En revanche, on voit que l'égalité avec reste intégral et cette inégalité revêtent un caractère global sur tout l'intervalle, au contraire de la formule de Taylor-Young.

Ce dernier corollaire peut aussi être vu comme une généralisation de l'inégalité des accroissements finis. On peut alors se demander si l'égalité des accroissements finis admet aussi une généralisation à l'ordre n . La réponse est oui, mais la formule (égalité de Taylor-Lagrange) n'est pas au programme.

7 EXTENSION AUX FONCTIONS À VALEURS COMPLEXES**Définition 7.1** (*Intégrales d'une fonction complexe continue*)

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{C})$ et $a, b \in I$, on appelle intégrale de f de a à b , le nombre complexe

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \Re f(t) dt + i \int_a^b \Im f(t) dt.$$

Théorème 7.2 (*Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue*)

Soit $f, g \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{K})$ et a, b, c trois points de I .

1. **Linéarité :** soit $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$, $\int_a^b \lambda f(t) + \mu g(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt$.
2. **Relation de Chasles :** $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$.
3. **Inégalité triangulaire :** $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$.

La formule de Taylor avec reste intégral et l'inégalité de Taylor-Lagrange restent vraies pour les fonctions à valeurs complexes.

8 SOMMES DE RIEMANN

Pour construire l'intégrale, nous avons utilisé des approximations des fonctions continues par les fonctions en escalier.

Cependant, parmi toutes les fonctions en escalier, on peut se limiter à une classe beaucoup plus simple : les fonctions en escaliers correspondant aux subdivisions à pas constants et pour lesquelles les valeurs des constantes est donnée par les valeurs de la fonction aux points de la subdivision.

Cette méthode a l'avantage d'être moins théorique et facilement implémentable en informatique pour calculer une valeur approchée de l'intégrale.

Dans le cas d'une fonction $\mathcal{C}^1$ (ou simplement lipschitzienne) on peut avoir une majoration de l'erreur.

Définition 8.1 (*Sommes de Riemann*)

Soit f continue sur $[a, b]$,

On définit la n -ième **somme de Riemann** de f sur $[a, b]$ par

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \quad \text{avec } \forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \quad x_k = a + \frac{b-a}{n}k.$$

En particulier, pour $[a, b] = [0, 1]$,

$$R_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Remarque : On pourrait également définir l'intégrale à partir des sommes

$\widetilde{R}_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$. La différence avec les sommes définies plus haut est alors

$$R_n(f) - \widetilde{R}_n(f) = \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

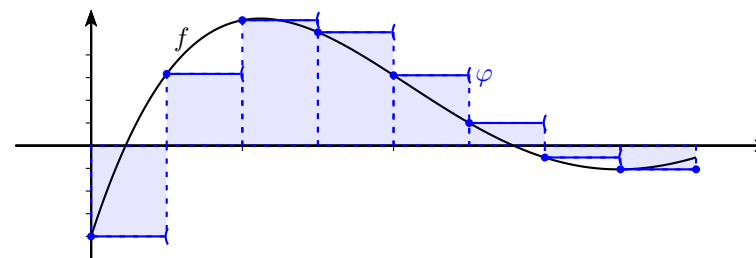
Propriété 8.2 (*Interprétation des sommes de Riemann*)

Pour $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$ et $n \in \mathbf{N}^*$, on définit

- la subdivision régulière de $[a, b]$ de longueur n avec $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, x_k = a + \frac{b-a}{n}k$.
- la fonction en escalier $\varphi_n : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ avec $\forall x \in [x_k, x_{k+1}[$, $\varphi(x) = f(x_k)$.

Ainsi,

$$R_n(f) = \int_a^b \varphi_n.$$



Théorème 8.3 (Méthode des rectangles)

Pour $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$, la suite des sommes de Riemann $(R_n(f))_{n \in \mathbf{N}}$ converge dans $\mathbf{R}$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(f) = \int_a^b f.$$

Preuve

La preuve au programme est uniquement dans le cas où $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbf{R})$.

On suppose donc $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbf{R})$, d'après l'inégalité des accroissements finis, il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que $\forall x, y \in [a, b], |f(x) - f(y)| \leq |x - y|M$.

En cohérence avec les notations de la définition, on pose $a_n = a + \frac{(b-a)}{n}n = b$.

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f - R_n(f) \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(a_k) \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{a_k}^{a_{k+1}} f - \frac{b-a}{n} f(a_k) \right) \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(t) - f(a_k)) dt \right| \quad \text{car } \int_{a_k}^{a_{k+1}} 1 dt = \frac{b-a}{n} \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) - f(a_k) dt \right| \quad \text{inégalité triangulaire.} \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(t) - f(a_k)| dt \quad \text{inégalité triangulaire.} \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} M(t - a_k) dt \quad \text{inégalité des accroissements finis.} \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} M \frac{(b-a)^2}{2n^2} \quad \text{car } a_{k+1} - a_k = \frac{b-a}{n} \\ &\leq M \frac{(b-a)^2}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Dans le cas $\mathcal{C}^1$, nous avons également un majorant de l'écart, et nous savons que la convergence se fait à la vitesse en $\frac{1}{n}$. ■

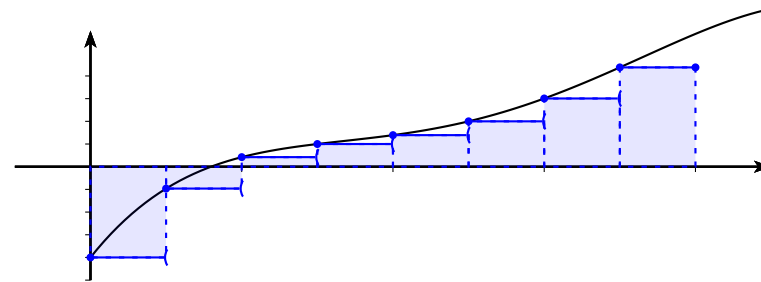
Exemple

Si f est **croissante** alors

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, R_n(f) \leq \int_a^b f \leq R_n(f) + \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)).$$

Solution :

Dans le cas d'une application croissante, l'aire (algébrique) des rectangles est toujours inférieure à celle « sous la courbe ». Cet exercice donne un majorant de l'écart. Ce majorant correspond à l'écart entre une approximation « par excès » avec $f(a_{k+1})$ et une approximation par défaut avec $f(a_k)$.



f est croissante, ainsi $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \forall t \in [x_k, x_{k+1}], f(x_k) \leq f(t) \leq f(x_{k+1})$.

Donc (par positivité de l'intégrale), $\frac{b-a}{n} f(a_k) \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} f \leq \frac{b-a}{n} f(x_{k+1})$.

Et par sommation (avec la relation de Chasles), on obtient :

$$R_n(f) \leq \int_a^b f \leq R_n + \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)).$$

Exemple

Soit (u_n) définie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{8k^3 + n^3}$.

Montrer que (u_n) converge et calculer sa limite.

Solution :

On remarque que l'on retrouve la valeur n , à la fois comme borne pour la sommation et à l'intérieur de l'expression : dans une telle situation, on doit penser aux sommes de Riemann. On écrit la somme pour obtenir des expression en $\frac{k}{n}$:

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{8k^3 + n^3} = \sum_{k=1}^n \frac{n^2}{n^3} \frac{\frac{k^2}{n^2}}{8\frac{k^3}{n^3} + 1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k^2}{n^2}}{8\frac{k^3}{n^3} + 1}.$$

Si on pose $f : x \mapsto \frac{x^2}{8x^3 + 1}$, alors $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{f(1)}{n} = R_n(f) + \frac{1}{9n}$.

Or, f continue sur $[0, 1]$, donc (R_n) converge vers $\int_0^1 f$, donc (u_n) aussi car $\frac{1}{9n} \rightarrow 0$.

$$\int_0^1 f = \int_0^1 \frac{x^2}{8x^3 + 1} = \frac{1}{24} [\ln(8x^3 + 1)]_0^1 = \frac{1}{24} \ln 9 = \frac{1}{12} \ln 3.$$

Donc $u_n \rightarrow \frac{1}{12} \ln 3$.

Exercice (Méthode des trapèzes)

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbf{R})$. On définit la suite (T_n) par

$$\forall n \geq 1, T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{2n} (f(a_k) + f(a_{k+1}))$$

avec $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k = a + \frac{b-a}{n}k$.

1. Donner une interprétation géométrique de T_n .
2. Montrer que T_n tend vers $\int_a^b f$.
3. (a) (*Lemme*) Soit $h \in \mathcal{C}^2([c, d], \mathbf{R})$ telle que $h(c) = h(d) = 0$, et M un majorant de $|h''|$ sur $[c, d]$.
Montrer que pour tout $x \in [c, d]$, $|h(x)| \leq M \frac{(x-c)(d-x)}{2}$.
Indication : Étudier $\varphi : x \mapsto M \frac{(x-c)(d-x)}{2} - h(x)$.
- (b) On suppose $f \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbf{R})$, on note $M_2 = \sup_{[a, b]} |f''|$.

Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$\left| \int_a^b f - T_n \right| \leq M_2 \cdot \frac{(b-a)^3}{12n^2}.$$