Suites usuelles

1 Suite arithmétique

Définition 1.1 *(Suite arithmétique)*

(u_n) est une **suite arithmétique** de raison $r \in \mathbf{R}$ si

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r$$

Théorème 1.2

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors

1. $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = u_0 + nr$
2. $\forall (p, n) \in \mathbf{N}^2, \quad u_n = u_p + (n-p)r$
3. (a) Si $r > 0$, la suite est strictement croissante de limite $+\infty$,
   (b) Si $r < 0$, la suite est strictement décroissante de limite $-\infty$,
   (c) Si $r = 0$, la suite est constante.

Preuve

1. Par récurrence.
   Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = u_0 + 0 \times r$. La relation est donc vérifiée au rang $n = 0$.
   Hérédité : on suppose la relation vraie au rang $n \in \mathbf{N}$ **fixé**, et on montre qu'elle est vraie au rang $n+1$.
   $$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + r \\ &= (u_0 + nr) + r \qquad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= u_0 + (n+1)r \end{aligned}$$
   Donc la relation est vraie au rang $n+1$.
   Conclusion : par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = u_0 + nr$
2. $u_n = u_0 + nr$ et $u_p = u_0 + pr$ d'après le point précédent. Donc en soustrayant les deux égalités on obtient : $u_n - u_p = (n-p)r$, c'est-à-dire $u_n = u_p + (n-p)r$.
3. $u_n = u_0 + nr$
   (a) Si $r > 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} nr = +\infty$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
   (b) Si $r < 0$, en exercice.
   (c) Si $r = 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = u_0 + n \times 0 = u_0$, donc la suite est constante.

■

Théorème 1.3

Soient m et n deux entiers avec $m \leq n$,

$$\sum_{k=\mathbf{m}}^{n} k = \frac{(m-n+1)(m+n)}{2} \qquad \text{et en particulier :} \qquad \sum_{k=\mathbf{0}}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Théorème 1.4 *(Rappel : somme arithmétique)*

Soit (u_n) une suite arithmétique,
Soient m et n deux entiers avec $m \leq n$,

$$\sum_{k=\mathbf{m}}^{n} u_k = (n-m+1)\frac{u_n+u_m}{2} \qquad \text{et en particulier :} \qquad \sum_{k=\mathbf{0}}^{n} u_k = (n+1)\frac{u_n+u_0}{2}$$

(nombre de termes) $\times$ (moyenne des termes extrêmes)

Preuve

Voir les preuves dans le chapitre sur les sommes et produits. ■

2 Suite géométrique

Définition 2.1 *(Suite géométrique)*

(u_n) est une **suite géométrique** de raison $q \in \mathbf{R}$ si

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = qu_n$$

Théorème 2.2

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, alors

1. $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = q^n u_0$
2. $\forall (p,n) \in \mathbf{N}^2,\ p \leq n \Rightarrow u_n = q^{n-p} u_p$
3. si $q \neq 0,\ \forall (p,n) \in \mathbf{N}^2,\ u_n = q^{n-p} u_p$ $\quad$ ($q \neq 0$ car l'exposant $n-p$ peut être négatif)

⚠ si la suite commence à l'indice 1, alors on a $u_n = q^{n-\mathbf{1}} u_{\mathbf{1}}$.

Théorème 2.3

Soit $q \neq 1$,
Soient m et n deux entiers avec $m \leq n$,

$$\sum_{k=\mathbf{m}}^{n} q^k = q^m \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q} \qquad \text{et en particulier :} \qquad \sum_{k=\mathbf{0}}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Théorème 2.4 *(Rappel : somme géométrique)*

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$,
Soient m et n deux entiers avec $m \leq n$,

$$\sum_{k=\mathbf{m}}^{n} u_k = u_m \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q} \qquad \text{et en particulier :} \qquad \sum_{k=\mathbf{0}}^{n} u_k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Remarque : Dans le cas où la raison vaut 1, on additionne simplement $n+1$ fois le même terme u_0.

Preuve

Voir les preuves dans le chapitre sur les sommes et produits. ■

3 Suite arithmético-géométrique

On combine les suites arithmétiques et géométriques en une seule :

Définition 3.1 *(Suite arithmético-géométrique)*

Soient $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, on définit la suite (u_n) par

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b$$

On dit que (u_n) est une suite **arithmético-géométrique**.

Remarque : Pour $a = 1$, c'est une suite arithmétique, et pour $b = 0$, c'est une suite géométrique.

⚠ a et b sont des constantes qui **ne dépendent pas** de n.

Théorème 3.2

Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ avec $a \neq 1$,
Si la suite $(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ est définie par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b$$

alors l'équation $x = ax + b$ admet une unique solution ℓ,
et la suite définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par $v_n = u_n - \ell$ est une suite géométrique de raison a.

Explications

La recherche de ℓ correspond à la recherche d'un *point fixe*, c'est-à-dire une suite constante qui est solution particulière de la relation de récurrence.
La suite de terme général $v_n = u_n - \ell$ est alors solution de « l'équation homogène » : $v_{n+1} = av_n$.
L'*équation homogène* est l'équation dont le second membre b est nul.
On retrouvera ce vocabulaire dans d'autres chapitres (équations différentielles, systèmes linéaires...).

Preuve

Comme $a \neq 1$, l'équation $ax + b = x$ admet une unique solution $\ell = \frac{b}{1-a}$.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \ell = au_n + b - \ell = au_n + b - (a\ell + b) = a(u_n - \ell) = av_n$$

■

Exemple

Soit une suite (u_n) définie par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ 3u_{n+1} + 2u_n + 5 = 0$$

Donner l'expression de u_n en fonction de n et de u_0 pour tout $n \in \mathbf{N}$.
Solution :

Théorème 3.3 *(limite de la suite)*

Soit (u_n), une suite arithmético-géométrique de raison a et de point fixe ℓ.

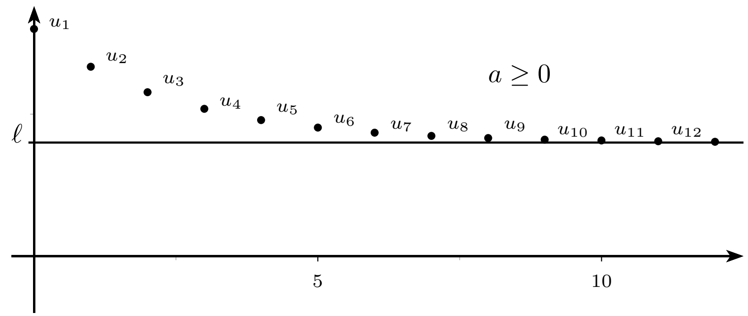
- Si $u_0 = \ell$, alors la suite est constante égale à ℓ.
- Si $u_0 \neq \ell$, alors
  - si $|a| < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$
  - si $a > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \pm\infty$ (le signe de la limite est celui de $u_0 - \ell$)
  - si $a \leq -1$, alors u_n n'admet pas de limite en $+\infty$.

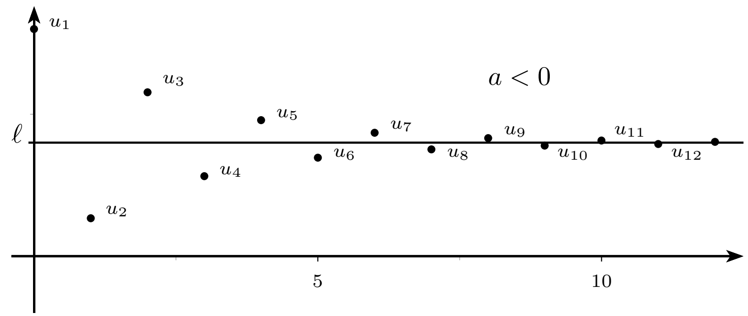
Preuve

En exercice ■

Explications

Dans le cas où la suite converge ($|a| < 1$ ou $a = 1$), le point fixe joue le rôle « d'attracteur ». Si $a \geq 0$, alors la suite converge de façon monotone vers ce point fixe, et si $a < 0$, alors, la suite converge en oscillant vers ℓ.





4 Suite récurrente linéaire d'ordre 2

Les suites géométriques peuvent être qualifiées de suites récurrentes linéaires d'ordre 1. Cette partie s'intéresse à l'ordre 2.

Définition 4.1 *(Suite récurrente d'ordre 2)*

Une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants est une suite de la forme

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0 \qquad \text{avec} \quad (a,b,c) \in \mathbf{R}^3 \text{ et } a \text{ non nul}$$

On appelle **équation caractéristique** l'équation $ax^2 + bx + c = 0$

Théorème 4.2 *(Solutions de la récurrence d'ordre 2)*

Soit (u_n), une suite définie comme dans la définition précédente.
On note Δ le discriminant de l'équation caractéristique :

- Si $\Delta > 0$, on note (r_1, r_2) les deux solutions de l'équation caractéristique, alors $\exists\,(\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2$, tel que
$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$
- Si $\Delta = 0$, on note r la racine double de l'équation caractéristique, alors $\exists\,(\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2$, tel que
$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \lambda r^n + \mu \boldsymbol{n} r^n$$
- Si $\Delta < 0$, on note $r_\pm = \rho\,\mathrm{e}^{\pm i\theta}$ les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique, alors $\exists\,(\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2$, tel que
$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \rho^n \left(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)\right)$$

λ et μ sont déterminés de façon unique par u_0 et u_1.

Remarque : si $a = 0$, alors c'est une suite récurrente d'ordre 1. La méthode fonctionne mais n'a aucun intérêt.

Preuve

Théorème admis en classe.

Remarque : La preuve qui suit suppose que l'on connaisse au préalable la forme des solutions, ce qui est loin d'être évident. Avec un peu de persévérance, on pourrait sans doute obtenir une telle formulation en s'inspirant des solutions de la suite arithmético-géométrique, cependant, ce serait beaucoup plus facile en faisant appel à l'algèbre linéaire et aux matrices. On verrait alors que ce théorème n'est qu'un cas particulier que l'on peut généraliser à tout ordre.

- Si $\Delta > 0$, soit (u_n) une suite solution, alors on peut trouver λ, μ deux réels tels que $\begin{cases} u_0 &= \lambda + \mu \\ u_1 &= \lambda r_1 + \mu r_2 \end{cases}$

  On résout et on trouve une unique solution : $\begin{cases} \lambda &= -\dfrac{u_1 - r_2 u_0}{r_2 - r_1} \\ \mu &= \dfrac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1} \end{cases}$

  On montre ensuite par récurrence double, que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$
- Si $\Delta = 0$.

  On peut supposer que la solution est non nulle. En effet, elle est nulle si $b = c = 0$, auquel cas, la suite solution est immédiate ($u_n = 0$ pour $n \geq 2$) et la formule donnée par le théorème convient.

  Supposons donc $r \neq 0$, alors on pose $\lambda = u_0$, et μ tel que $u_1 = \lambda r + \mu r$, c'est-à-dire $\mu = \frac{u_1 - r u_0}{r}$.
  Comme r est l'unique racine du polynôme caractéristique, on sait que $b = -2ar$ et $c = ar^2$.
  On montre par récurrence double que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = \lambda r^n + \mu n r^n$
- Si $\Delta < 0$, alors on peut utiliser une récurrence double avec les formules trigonométriques.

  ⋆ Sinon, pour ceux qui aiment s'amuser, on peut utiliser une autre méthode :
  On utilise le résultat pour $\Delta > 0$ dans $\mathbf{C}$ pour voir qu'il s'agit simplement d'un cas particulier.
  En effet, si on se place dans $\mathbf{C}$, alors le raisonnement pour $\Delta > 0$ reste valable et dit que pour tout $n \in \mathbf{N}$,
  $$\begin{aligned} u_n &= \lambda r_1^n + \mu r_2^n = \lambda r^n\,\mathrm{e}^{in\theta} + \mu r^n\,\mathrm{e}^{-in\theta} \\ &= r^n \left((\lambda+\mu)\frac{\mathrm{e}^{in\theta} + \mathrm{e}^{-in\theta}}{2} + (\lambda-\mu)\frac{\mathrm{e}^{in\theta} - \mathrm{e}^{-in\theta}}{2} \right) \\ &= r^n \left(\lambda' \cos(n\theta) + \mu' \sin(n\theta)\right) \end{aligned}$$
  Montrons que les coefficients trouvés λ' et μ' sont bien réels.
  On peut s'en assurer en résolvant pour $n = 0$ et $n = 1$, mais comme on aime compliquer les choses et voir que tout est cohérent, on va le vérifier à partir des expression en λ et en μ trouvées pour $\Delta > 0$
  D'après le cas $\Delta > 0$, on a
  $$\begin{cases} \lambda = \dfrac{u_1 - r\,\mathrm{e}^{i\theta} u_0}{r\,\mathrm{e}^{-i\theta} - r\,\mathrm{e}^{i\theta}} = \dfrac{-1}{r}\dfrac{u_1 - r\,\mathrm{e}^{i\theta} u_0}{2i\sin\theta} & (\sin\theta \neq 0 \text{ et } r \neq 0 \ \text{ car } \Delta < 0) \\ \mu = -\dfrac{u_1 - r\,\mathrm{e}^{-i\theta} u_0}{r\,\mathrm{e}^{i\theta} - r\,\mathrm{e}^{-i\theta}} = \dfrac{1}{r}\dfrac{u_1 - r\,\mathrm{e}^{-i\theta} u_0}{2i\sin\theta} & \end{cases}$$
  Donc
  $$\begin{cases} \lambda' = \lambda + \mu = \dfrac{1}{2ir\sin\theta}\left(-u_1 + r\,\mathrm{e}^{i\theta} u_0 + u_1 - r\,\mathrm{e}^{-i\theta} u_0\right) = u_0 \in \mathbf{R} \\ \mu' = (\lambda - \mu)i = \dfrac{1}{2r\sin\theta}\left(-u_1 + r\,\mathrm{e}^{i\theta} u_0 - u_1 + r\,\mathrm{e}^{-i\theta} u_0\right) \\ \quad = \dfrac{1}{2r\sin\theta}\left(-2u_1 + 2ru_0\cos\theta\right) u_1 = -\dfrac{u_1 - r\cos\theta u_0}{r\sin\theta} \in \mathbf{R} \end{cases}$$

■

Exemple

Étude de la suite de Fibonacci définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Solution :

Théorème 4.3 *(Suite récurrente d'ordre 2 avec second membre)*

Soient $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ avec a et c différents de 0, et (d_n) une suite réelle.
Soit la suite $(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ définie par la relation de récurrence d'ordre 2

$$(E_d) \ : \qquad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = d_n$$

On appelle **relation homogène associée**, la relation de récurrence sans le second membre :

$$(E_0) \ : \qquad a\widetilde{u}_{n+2} + b\widetilde{u}_{n+1} + c\widetilde{u}_n = 0$$

On note $\mathcal{S}_d$ l'ensemble des solutions de la relation (E_d)
$\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions de la relation homogène (E_0)
(obtenues grâce au théorème 4.2).

On suppose connue une **solution particulière** de (E_d) : $(u_n^d) \in \mathcal{S}_d$.

La suite (u_n) est solution de (E_d) si et seulement si $(u_n - u_n^d)$ est solution de (E_0) :

$$(u_n) \in \mathcal{S} \iff (u_n - u_n^d) \in \mathcal{S}_0$$

Que l'on peut aussi écrire (en comprenant bien le sens du signe « + ») :

$$\mathcal{S}_d = \mathcal{S}_0 + (u_n^d)$$

Explications

C'est la même chose qu'à l'ordre 1. En général, dans les exercices, d est une constante.

Preuve

Ce théorème est en fait un exemple d'un résultat beaucoup plus général lié directement à la notion de linéarité.

$$\begin{aligned}
(u_n) \in \mathcal{S}_d &\iff \forall n \in \mathbf{N},\ au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = d_n \\
&\iff \forall n \in \mathbf{N},\ au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = au_{n+2}^d + bu_{n+1}^d + cu_n^d \\
&\iff \forall n \in \mathbf{N},\ a\left(u_{n+2} - u_{n+2}^d\right) + b\left(u_{n+1} - u_{n+1}^d\right) + c\left(u_n - u_n^c\right) = 0 \\
&\iff \left(u_n - u_n^d\right) \in \mathcal{S}_0
\end{aligned}$$

■

Exercice

Trouver une solution particulière lorsque (d_n) est une suite constante égale à d.

Solution :