Systèmes linéaires

« What is the difference between method and device ?
A method is a device which you used twice. »
George Pólya (1887-1985)

Ce chapitre développe des méthodes algorithmiques pour résoudre les systèmes linéaires qui interviendront ensuite en algèbre linéaire et en probabilités.
L'interprétation géométrique reste assez succincte à ce stade, mais sera développée dans le chapitre sur les applications linéaires. Pour le moment, il s'agit donc avant tout de développer des méthodes algorithmiques et calculatoires et vue d'une utilisation ultérieure qui leur donnera tout leur sens.
Ce chapitre ne contient donc **aucune théorie**.
Le point d'orgue de ce chapitre est la présentation de la méthode du pivot de Gauss, dite aussi algorithme de Gauss-Jordan, qui a déjà été présentée en terminale.

1 Système linéaire et interprétation géométrique

A Écriture d'un système linéaire

Définition 1.1 *(Système linéaire)*

Un **système linéaire** de taille $n \times p$ est un système à n équations et p inconnues de la forme :

$$(\mathscr{S}) \ : \ \begin{cases} a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & +\cdots & +a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & +\cdots & +a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & +a_{n,2}x_2 & +\cdots & +a_{n,p}x_p & = & b_n \end{cases}$$

où les $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et les $(b_j)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont dans $\mathbf{K}$.
Les $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ sont les inconnues (supposées également dans $\mathbf{K}$).
Lorsque tous les $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont nuls, on dit que le système est **homogène**.

Propriété 1.2 *(Écriture matricielle)*

Au système $(\mathscr{S})$ défini plus haut, est associée une **matrice augmentée** :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} & b_n \end{array}\right)$$

Si on note

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

A représente la partie homogène et B le second membre.

Remarque : Pour parler de système linéaire, il faut que les inconnues ne soient **pas** multipliées entre elles, mises au carré, à l'inverse, avec une racine, un logarithme... sinon, on ne peut pas associer de matrice au système avec cette méthode.

B Interprétation géométrique intuitive sur R

Même si la notion de *dimension* n'a pas encore été formellement vue en cours, on peut s'appuyer sur son intuition pour dégager une interprétation géométrique au système :

Nombre d'inconnues : Le nombre d'inconnues détermine la *dimension* de l'espace de départ (chaque inconnue correspond à une coordonnée).

- une inconnue : x sur la droite des réels $\mathbf{R}$,

- deux inconnues : (x, y) dans le plan $\mathbf{R}^2$,
- trois inconnues : (x, y, z) dans l'espace $\mathbf{R}^3$...

Équations : Chaque équation (non triviale) décrit un espace de dimension $p-1$ (où p est le nombre d'inconnues)

- avec une inconnue : $x = 5$ désigne un point de la droite,
- avec deux inconnues : $3x + 2y = 0$ désigne une droite dans le plan,
- avec trois inconnues : $3x + 2y + z = 0$ désigne un plan dans l'espace...

Nombre d'équations : Les solutions correspondent aux intersections des espaces décrits par chacune des équations. En effet, un point est solution lorsque ses coordonnées vérifient toutes les équations en même temps, c'est-à-dire quand le point appartient à tous les espaces correspondants.
En général, lorsque les équations ne contiennent pas d'information redondante, chaque nouvelle équation diminue de 1 la dimension de l'espace des solutions.
Par exemple, dans $\mathbf{R}^3$, une équation donne un plan. Deux équations correspondent à l'intersection de deux plans qui, s'ils ne sont pas parallèles, décrivent une droite.

Effet du second membre : La matrice colonne B peut être interprétée comme un vecteur dans un espace de dimension n (il y a n coordonnées).
Lorsque le système n'est pas homogène (le vecteur est non nul), cela revient à prendre des espaces de solutions (droites, plans...) qui ne passent pas nécessairement par l'origine du repère mais sont translatés. C'est ce que décrit le théorème suivant :

Définition 1.3 *(Système compatible)*

Un système linéaire est **compatible** s'il admet au moins une solution.

Théorème 1.4 *(Structure des solutions)*

Soit $(\mathscr{S})$ un système linéaires à n équations et p inconnues.

- Si le système est homogène, alors le système est compatible et le $p-$uplet 0 appartient à l'ensemble des solutions.
- Si le second membre est non nul, alors l'ensemble des solutions est soit vide, soit sous la forme
$$x_0 \text{ “+” } \mathscr{S}_0$$
avec x_0 est une solution particulière, et $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions du système homogène.

2 La méthode de résolution par substitution

La méthode de substitution est la plus naturelle. Elle est simple à réaliser à la main lorsque les systèmes sont *petits* et elle a l'avantage de pouvoir être également utilisée pour les systèmes non linéaires (avec des produits d'inconnues, des racines, exponentielles...).

Exemple

Résoudre le système suivant par substitution. $(S) : \begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x-2y+z &= 2 \\ x+y-z &= 3 \end{cases}$

Puis interpréter géométriquement l'ensemble des solutions.

Solution :
La dernière équation permet d'exprimer z en fonction de x et y : $z = x + y - 3$.
On remplace z par son expression dans les deux autres équations.

$$(S) \iff \begin{cases} x+y+x+y-3=1 \\ x-2y+x+y-3=2 \\ z=x+y-3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2(x+y)=4 \\ 2x-y=5 \\ z=x+y-3 \end{cases}$$

Les deux premiers équations ne dépendent plus que de x et y. Dans la deuxième, on exprime y en fonction de x : $y = 2x - 5$, et on substitue dans la première équation.

$$(S) \iff \begin{cases} 2(x+2x-5)=4 \\ y=2x-5 \\ z=x+y-3 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x-5=2 \\ y=2x-5 \\ z=x+y-3 \end{cases}$$

On résout la première équation qui ne dépend plus que de x : $x = \frac{7}{3}$.
On remplace x par sa valeur dans la deuxième équation, qui donne : $y = \frac{14}{3} - 5 = -\frac{1}{3}$.
Puis on remplace x et y par leur valeur dans la dernière équation pour obtenir : $z = \frac{7}{3} - \frac{1}{3} - 3 = -1$.

Les solutions de (S) sont donc exactement composées du triplet $(x, y, z) = (\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, -1)$.

Géométriquement :
Cela correspond dans l'espace de dimension $3_{\text{(3 inconnues)}}$ à l'intersection de $\text{trois}_{\text{(nombre d'équations)}}$ $\text{plans}_{\text{(dimension } 3-1\text{)}}$.
On a montré que ces trois plans sont concourants en un unique point dont on a trouvé les coordonnées.

On peut formaliser ainsi la méthode (ne pas apprendre par cœur) :

Méthode *(Méthode de substitution)*

Pour un système à n équations et p inconnues,

1. on utilise une équation pour exprimer une des inconnues en fonction des autres (qui jouent le rôle de paramètres),
2. dans les $n-1$ équations restantes, on remplace l'inconnue par l'expression obtenue précédemment qui est fonction des $p-1$ autres inconnues.
   $\longrightarrow$ il reste donc $n-1$ équations à $p-1$ inconnues.
3. on réitère le même processus avec les $n-1$ équations et $p-1$ inconnues restantes.
4. arrivé à la dernière étape,
   - soit il ne reste plus qu'une équation et on obtient donc une relation entre les $p-n+1$ inconnues restantes. On exprime ensuite les autres inconnues à partir de celles-ci.
   - soit il ne reste plus qu'une inconnue pour plusieurs équations. Si les équations sont indépendantes non triviales, alors il n'y a pas de solutions.

⚠ Il faut essayer autant que possible de travailler par équivalence pour résoudre un système. Si on perd l'équivalence, il faut penser à la réciproque.

3 L'algorithme du pivot de Gauss

Lorsque le système est linéaire, il est presque toujours préférable d'oublier la méthode par substitution au profit de la méthode du pivot de Gauss.
Cette dernière est beaucoup plus efficace pour les « gros système », lle peut être facilement programmée et elle possède une interprétation géométrique avec les applications linéaires (qui seront vues plus tard).
En revanche, contrairement à la méthode par substitution, la méthode du pivot ne permet pas de résoudre les systèmes non linéaires.

A Matrices échelonnées

Le principe est de mettre le système sous une forme facilement résoluble.

Exemple

On définit le système d'inconnues réelles : (S) :
$$\begin{cases} \mathbf{5}x_1 & -x_2 & +8x_3 & +x_4 & +x_5 & = 0 \\ & & \mathbf{2}x_3 & +8x_4 & & = 0 \\ & & & x_4 & +x_5 & = 0 \end{cases}$$
Sa matrice associée est $\begin{pmatrix} \mathbf{5} & -1 & 8 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \end{pmatrix}$
Pour résoudre, il suffit de « remonter » en exprimant les inconnues les unes à partir des autres.

- x_5 va servir d'**inconnue secondaire** (ou **paramètre**) duquel dépendra la valeur de x_4 considérée comme une **inconnue principale** : $x_4 = -x_5$
- x_3 est à nouveau définie de manière unique par $x_3 = -4x_4 = 4x_5$.
  C'est aussi une inconnue principale.
- À nouveau, rien ne permet de déterminer x_2 qui peut prendre n'importe quelle valeur. x_2 agira donc également comme **inconnue secondaire**.
- Enfin, $x_1 = \dfrac{1}{5}(x_2 - 8x_3 - x_4) = \dfrac{1}{5}(x_2 - 32\,x_5 + x_5) = \dfrac{x_2 - 31\,x_5}{5}$, la valeur est aussi définie de manière unique : c'est une inconnue principale.

On peut donc donner l'ensemble des solutions :
$$\begin{aligned} \mathscr{S} &= \left\{ \left(\frac{x_2 - 31\,x_5}{5},\ x_2,\ 4x_5,\ -x_5,\ x_5 \right),\ (x_2, x_5) \in \mathbf{R}^2 \right\} \\ &= \text{Vect}\left(\left(\frac{1}{5}, 1, 0, 0, 0 \right),\ \left(-\frac{31}{5}, 0, 4, -1, 1 \right) \right) \end{aligned}$$

Explications

Ce qui a permis de résoudre facilement le système, c'est sa forme « *triangulaire* » particulière. C'est ce que l'on appelle une **forme échelonnée**.

Définition 3.1 *(Matrice échelonnée en lignes)*

On appelle matrice échelonnée en lignes, toute matrice $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ telle que

- Si une ligne est nulle, les suivantes le sont aussi
- (à partir de la deuxième ligne) le premier coefficient non nul de chaque ligne est strictement à droite de celui de la ligne précédente.

Exemple

$$M = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & 3 & 8 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & \mathbf{4} & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ est échelonnée,

mais $N = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & 3 & 8 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & \mathbf{4} & 0 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas échelonnée (à cause du 4 et du 1 l'un au dessus de l'autre).

Définition 3.2

- On appelle **pivot**, le premier coefficient non nul de chaque ligne,
- les inconnues correspondant aux pivots sont les **inconnues principales** du système,
- les autres inconnues sont les **inconnues secondaires** ou **paramètres** du système.

Exemple

Dans l'exemple du début,

- les pivots du système (S) sont $5, 2$ et 1. Ce sont les éléments que l'on a besoin d'inverser lors de la résolution du système homogène associé pour obtenir les valeurs des inconnues principales qui leur correspondent.
- les inconnues principales sont x_1, x_3 et x_4. Ce sont les inconnues qui « *disparaissent* » dans la résolution du système et seront exprimées en fonction des paramètres. Elles correspondent au colonnes du système qui comportent des pivots.
- les inconnues secondaires ou paramètres sont x_2 et x_5. Ils prennent n'importe quelle valeur. Le choix de leur valeur détermine celui des inconnues principales.

Définition 3.3 *(Matrice échelonnée réduite en ligne)*

Une matrice **échelonnée réduite** en ligne est une matrice échelonnée en ligne telle que

1. les pivots valent 1
2. les pivots sont les seuls coefficients non nuls de leur colonne.

Exemple

$$M = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 7 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ est échelonnée réduite.

Donner les solutions.

Solution :

Les solutions du système s'écrivent directement :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_4 + 5x_7 = 0 \\ x_3 + 7x_4 + 5x_7 = 0 \\ x_5 + 2x_7 = 0 \\ x_6 + 7 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -3x_2 - x_4 - 5x_7 \\ x_3 = -7x_4 - 5x_7 \\ x_5 = -2x_7 \\ x_6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathscr{S} &= (-3x_2 - x_4 - 5x_7\,,\, x_2\,,\, -7x_4 - 5x_7\,,\, x_4\,,\, -2x_7\,,\, 0\,,\, x_7) \\ &= (-3\,,\, 1\,,\, 0\,,\, 0\,,\, 0\,,\, 0\,,\, 0)\, x_2 + (-1\,,\, 0\,,\, -7\,,\, 1\,,\, 0\,,\, 0\,,\, 0)\, x_4 + (-5\,,\, 0\,,\, -5\,,\, 0\,,\, -2\,,\, 0\,,\, 1)\, x_7 \\ &= \text{Vect}\left((-3,1,0,0,0,0,0)\,,\, (-1,0,-7,1,0,0,0)\,,\, (-5,0,-5,0,-2,0,1) \right) \end{aligned}$$

Explications

La forme échelonnée réduite permet des résolutions encore plus simples : la solution y est directement lue. Avec un peu d'habitude, on écrit directement la famille génératrice de l'espace des solutions à partir de la matrice.

B Systèmes équivalents

À présent, l'objectif est d'être capable de mettre un système linéaire quelconque sous forme échelonnée (éventuellement réduite).
Pour cela, l'idée est d'essayer de simplifier au maximum l'écriture matricielle du système tout en préservant le même ensemble des solutions.

Définition 3.4 *(Systèmes équivalents)*

Deux systèmes d'équations sont dits **équivalents**, s'ils ont le même ensemble de solutions.

Exemple

$5x + 3y = 0$ et équivalent à $10x + 6y = 0$ car $5x + 3y = 0 \iff 10x + 6y = 0$.

On va définir trois types d'opérations élémentaires sur les lignes qui permettrons de créer des systèmes équivalents.

Définition 3.5 *(Opérations élémentaires sur les lignes)*

Soit un système linéaire à n lignes et p inconnues.
Pour tout $(i, j) \in [\![1; n]\!]^2$ et $\lambda \in \mathbf{K}^*$, on définit

- la **permutation** des lignes i et j correspond à l'échange des lignes i et j dans le système.
  On note $L_i \leftrightarrow L_j$
- la **dilatation** de la ligne i de rapport λ correspond à la multiplication de la ligne i par λ.
  On note $L_i \leftarrow \lambda L_i$
- la **transvection** entre les lignes i et j de rapport λ correspond à l'ajout à la ligne i de la ligne j multipliée par λ.
  On note $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

Remarque sur le rapport λ : il doit être **non nul**.
En effet, une dilatation de rapport nul revient à multiplier une ligne par 0 et à perdre ses informations : les systèmes ne sont plus équivalents.
Pour la transvection, si le rapport est nul, c'est que l'on a rien fait.

Théorème 3.6 *(Systèmes équivalents en ligne)*

Étant donné un système linéaire (S), tout système (S') qui peut être obtenu à partir de (S) avec un nombre fini d'opérations élémentaires sur les lignes est équivalent à (S).
On dit que (S) et (S') sont **équivalents en ligne**, et on note

$$(S) \underset{L}{\sim} (S')$$

Preuve

C'est trivial, c'est simplement que toutes les opérations élémentaires sur les lignes sont inversibles. Ainsi, on peut toujours « revenir en arrière » après avoir effectué une opération élémentaire, cela signifie bien que les systèmes sont équivalents.
Si on effectue un nombre fini d'opérations, il suffit de les « *détricoter* » ensuite une par une pour revenir au système de départ. ■

Méthode *(Utilisation des matrices)*

Plutôt que de faire les opérations sur le système avec les inconnues, on peut le faire directement sur les matrices *augmentées* des systèmes.
On parle alors de **matrices équivalentes en ligne**.

C Algorithme du pivot de Gauss

Voici à présent l'algorithme du pivot de Gauss qui permet de trouver une (*la*) forme échelonnée réduite pour chaque matrice.
(Ne pas passer trop de temps sur la méthode formelle et étudier rapidement l'exemple).

Méthode *(Algorithme du pivot de Gauss)*

On effectue successivement les opérations sur les lignes :

1. Échange éventuel de deux lignes pour mettre en première ligne celle qui a le moins de zéro au début, (permutation)
2. Multiplication de cette ligne par l'inverse de son premier coefficient non nul, (dilatation)
3. Annulation les autres coefficients de la colonne avec des matrices de transvection à partir de cette ligne.
4. On recommence cet algorithme sur la sous matrice à laquelle on enlève les premières colonnes déjà traitées.

On obtient une matrice échelonnée réduite après un nombre fini d'opérations.

Remarques diverses :

- Lors de l'utilisation à la main du pivot du Gauss, on s'autorise une certaine souplesse dans le suivi de l'algorithme. Il serait parfois maladroit de vouloir le suivre à la lettre Il s'en suit que deux personnes pourront avoir des étapes différentes, l'important étant que les systèmes soient toujours équivalents entre eux et qu'à la fin, tout le monde ait les mêmes solutions.
- Dans les chapitres sur les matrices et sur l'algèbre linéaire, la méthode du pivot sera largement utilisée pour obtenir de nombreux résultats qui dépassent le simple cadre de la résolution de systèmes linéaires pour eux-mêmes.

Exemple

Application de l'algorithme à la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

Opération	Résultat
	$M = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$
$L_1 \leftrightarrow L_2$	$M_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 5 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$
$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$	$M_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 5 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -14 & -3 & 0 \end{pmatrix}$
$L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2$	$M_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 5 & 2 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -14 & -3 & 0 \end{pmatrix}$
$L_1 \leftarrow L_1 - 5L_2$	$M_4 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 2 & \frac{2}{3} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -14 & -3 & 0 \end{pmatrix}$
$L_3 \leftarrow L_3 + 14L_2$	$M_5 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 2 & \frac{2}{3} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -3 & -\frac{14}{3} \end{pmatrix}$
$L_3 \leftarrow -\frac{1}{3}L_3$	$M_6 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 2 & \frac{2}{3} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{14}{9} \end{pmatrix}$
$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3$	$R = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & -\frac{22}{9} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{14}{9} \end{pmatrix}$

Théorème 3.7

Toute matrice est équivalente à une matrice échelonnée réduite en lignes. Cette matrice est **unique**.

Preuve *(Existence et unicité de la forme échelonnée réduite)*

Cette preuve peut être sautée sans beaucoup de perte...

Existence :

On raisonne par récurrence en s'aidant de la méthode du pivot. L'hypothèse des récurrence est que nous sachions le faire pour une matrice de k colonnes.

Pour $k = 1$, la matrice est composée d'un seul scalaire, il n'y a rien à faire.

Supposons la propriété vraie au rang k,

alors, au rang $k+1$, on applique la première partie de l'algorithme :

- si la première colonne est nulle, alors les opérations sur les k colonnes de gauche, n'affecteront pas la première colonne et on peut donc utiliser l'hypothèse de récurrence et obtenir une matrice échelonnée réduite en lignes.
- si la première colonne est non nulle,
  1. je place un des coefficients non nuls a en première ligne avec une permutation.
  2. puis je multiplie la première ligne de la matrice par $\frac{1}{a}$ pour obtenir un 1 en haut à gauche,
  3. puis j'annule tous les autres coefficients de la colonne avec des transvections,
  4. je considère la matrice constituée des k dernières lignes et colonnes. Par hypothèse de récurrence, je peux la réduire (et cela ne modifie par la première ligne),
  5. À partir de chacun des pivots, j'annule le coefficient correspondant de la première ligne avec une transvection.

  La matrice obtenue est échelonnée réduite en lignes.

Unicité : On suppose qu'il en existe deux et on montre qu'elles sont identiques.
On réalise une récurrence sur le nombre de colonnes.
Pour $k = 1$, c'est trivial.
On suppose l'unicité au rang k : pour k colonnes.
On considère la matrice avec $k+1$ colonnes que l'on interprète comme la matrice augmentée d'un système linéaire. On peut donc supposer que les k premiers colonnes forment le système linéaire homogène et que la dernière est le second membre.
Lorsqu'on a travaillé sur le système homogène avec k colonnes, on a obtenu une matrice échelonnée réduite qui est unique (par hypothèse de récurrence).
Les k premières colonnes sont donc identiques entre les deux matrices. Montrons que la dernière l'est aussi :
Elle correspond au second membre.
S'il y a une solution X, alors elle est solution des deux systèmes et les seconds membres sont égaux (quand on remplace les inconnues par leur valeur x_i, on doit obtenir les mêmes valeurs).
S'il n'y a pas de solution, alors cela suppose que la dernière ligne nulle du système correspond à une ligne non nulle du second membre, donc avec 1 car c'est un pivot. Toutes les autres lignes du second membre sont donc nulles et les deux second membres sont identiques. ■

D Lecture des solutions sur la forme échelonnée réduite

Théorème 3.8 *(Structure des solutions d'un système homogène)*

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ une matrice avec r pivots, identifiée à son système **homogène** (S).
(S) contient alors r inconnues principales et $p-r$ paramètres.
Le choix arbitraire des valeurs des $p-r$ paramètres fixe de façon unique les valeurs des inconnues principales.

Si on note X_i le vecteur solution tel que le $i^{\text{ème}}$ paramètre vaut 1, et les autres 0, **alors**, les solutions du système s'écrivent sous la forme :

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_{p-r} X_{p-r}$$

avec $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant p-r} \in \mathbf{K}^{p-r}$.

Ainsi $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ forme une famille génératrice des solutions.
*(*On peut aussi montrer qu'elle est libre : c'est une base.)
On note donc l'ensemble des solutions :

$$\mathscr{S} = \text{ Vect}\,(X_1, X_2, \cdots, X_{p-r}).$$

Théorème 3.9 *(Condition nécessaire et suffisante de compabtibilité)*

Un système, sous forme échelonnée, est compatible, si et seulement s'il n'a pas de pivot dans le second membre.

Théorème 3.10

Un système linéaire admet soit 0, soit 1, soit une infinité de solutions.

Preuve

Découle des théorèmes précédents. ■

Exemple

Résoudre le système d'équations :

$$(S)\ :\ \begin{cases} x_1 & +2x_2 & & & +5x_5 & = 0 \\ & & x_3 & & -2x_5 & = 0 \\ & & & x_4 & +x_5 & = 0 \end{cases}$$

Solution :

La matrice associée au système homogène est $A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \end{pmatrix}$.
Ce système est déjà mis sous forme échelonnée réduite. Il y a trois inconnues principales (x_1, x_3, x_4) qui correspondent aux positions des pivots, et deux paramètres (x_2,x_5).

Les solutions s'écrivent en fonction des paramètres :

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - 5x_5 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 2x_5 \\ x_4 = -x_5 \\ x_5 = x_5 \end{cases}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-2x_2 - 5x_5, x_2, 2x_5, -x_5, x_5) = x_2 \underbrace{(-2, 1, 0, 0, 0)}_{X_1} + x_5 \underbrace{(-5, 0, 2, -1, 1)}_{X_2}$$

X_1 correspond à la solution pour $x_2 = 1$, $x_5 = 0$ et X_2 pour $x_2 = 0$, $x_5 = 1$.
On obtient les mêmes solutions en appliquant la méthode décrite dans le théorème :

Pour $x_2 = 1$ et $x_5 = 0$, on a :

$x_1 = -2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0$

c'est-à-dire : $X_1 = (-2, 1, 0, 0, 0)$

Pour $x_2 = 0$ et $x_5 = 1$, on a :

$x_1 = -5,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2,\ x_4 = -1,\ x_5 = 1$

c'est-à-dire : $X_2 = (-5, 0, 2, -1, 1)$

Si on choisit d'autres valeurs de paramètres, cela revient à multiplier les solutions correspondantes par ces valeurs.
Par exemple, si on choisit $x_2 = 2$, la solution sera simplement $2X_A$. Si on choisit $x_2 = 2$ et $x_5 = -1$, la solution sera $2X_1 - X_2$.
Dans le cas général, comme x_2 et x_5 peuvent prendre n'importe quelles valeurs, alors les solutions sont sous la forme

$$\lambda(-2, 1, 0, 0, 0) + \mu(-5, 0, 2, -1, 1) = \lambda X_1 + \mu X_2.$$

On le note $\mathscr{S} = \text{Vect}_{\mathbf{K}}\,(\,X_1\,,\,X_2\,) = \text{Vect}_{\mathbf{K}}\,(\,(-2, 1, 0, 0, 0)\,,\,(-5, 0, 2, -1, 1)\,)$.