Les deux exercices et le problème qui suivent sont indépendants et peuvent donc être abordés dans un ordre laissé au libre choix du candidat. Dans l'ensemble du sujet, pour répondre à une question, le candidat pourra admettre les résultats des questions précédentes, du moment qu'il l'aura clairement indiqué.
Il est demandé de soigneusement numéroter les questions. Il sera fait grand cas lors de la correction de la clarté, de la concision et de la précision de la rédaction.

Exercice I

Soit $p, q \in]0,1[$ et soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$h(t) = tp - \ln\Big[(1-q) + q\exp(t)\Big] \ .$$

Soit en outre $d :]0,1[\times]0,1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$d(x,y) = x\ln\left(\frac{x}{y}\right) + (1-x)\ln\left(\frac{1-x}{1-y}\right) \ .$$

(1) Calculer $h'(t)$ puis $h''(t)$.

(2) Montrer que h admet un unique maximum sur $\mathbb{R}$, et déterminer en fonction de p et de q la valeur t^* où ce maximum est atteint.

(3) Montrer que $h(t^*) = d(p,q)$.

(4) Pour $x \in]0,1[$ fixé, tracer l'allure du graphe de la fonction $f : y \mapsto d(x,y)$, en précisant les éventuelles tangentes et asymptotes remarquables.

(5) Pour $y \in]0,1[$ fixé, tracer l'allure du graphe de la fonction $g : x \mapsto d(x,y)$, en précisant les éventuelles tangentes et asymptotes remarquables.

(6) Montrer que $d(p,q) \geqslant 0$ pour toutes les valeurs de $(p,q) \in]0,1[^2$.

(7) Pour quelles valeurs de $(p,q) \in]0,1[^2$ a-t-on $d(p,q) = 0$?

(8) Montrer : $\forall (p,q) \in]0,1[^2 \ , \ d(p,q) \geqslant 2(p-q)^2$.

MATHÉMATIQUES

ÉPREUVE COMMUNE : ÉCRIT

Sylvain Arlot, Aurélien Garivier

Coefficient : 3

Durée : 4 heures

Calculatrice interdite

Commentaires généraux

Le sujet était composé de deux exercices indépendants et d'un problème, portant sur des aspects totalement différents du programme. Comme à l'habitude, le sujet était long, couvrait une très large partie du programme, et permettait à chaque candidat de valoriser ses connaissances, ses aptitudes et la qualité de ses raisonnements mathématiques sur des questions de difficultés variées. En particulier, les premières questions de chaque exercice ou problème permettaient de tester l'acquisition des connaissances de base en analyse, probabilités et algèbre.

Tous les candidats suffisamment préparés auraient dû facilement venir à bout des questions I.1, II.1 et III.4,8 ; cela assurait déjà une note supérieure à 6.5/20, comme 298 candidats sur 548 présents. Il semblait facile de résoudre en plus les questions I.4 et III.1,5,7, ce qui permettait d'atteindre au moins 11/20, comme 141 copies. En résolvant correctement les questions I.1–4, II.1–2,5 et III.1,4–5,8, on obtenait au moins 14/20, niveau que seuls 62 candidats ont atteint. Enfin, en résolvant en plus les questions I.5–7, II.3–4 et III.2–3,7, on obtenait une note supérieure à 17.5/20, comme les 13 meilleures copies cette année. Les candidats préférant prendre le temps de faire aboutir des raisonnements plus fins trouvaient dans les questions I.8, II.8–12, et III.9,11–14 matière à réflexion, et pouvaient obtenir d'excellentes notes sans en traiter un grand nombre.

Insistons sur le fait que la présence de questions relativement difficiles (I.8, II.8–12, et III.9,11–14) ne doit aucunement décourager les candidats qui n'arriveraient pas à en venir à bout : on pouvait obtenir 19.5/20 sans en résoudre aucune, à condition de savoir rédiger correctement les questions plutôt classiques du reste du sujet.

Le jury renouvelle son inquiétude de voir une proportion importante de copies totalement indigentes (192 copies sur 548 ont obtenu une note inférieure ou égale à 4/20). La remontée de la moyenne ne doit pas cacher le fait que manifestement, de trop nombreux candidats ont totalement abandonné les mathématiques avant de se présenter au concours. Signalons donc que parmi les 57 admissibles à l'ENS, seuls quatre ont obtenus une note en mathématiques strictement inférieure à 10/20, et un seul d'entre eux a été admis.

Saluons toutefois la qualité des meilleures copies, qui ont impressionné le jury par la précision de leur rédaction, la qualité des raisonnements présentés et la quantité de questions traitées correctement : on pourrait croire que leurs auteurs suivent un cursus de mathématiques.

De manière générale, il semble qu'une majorité des candidats sont troublés par le fait de devoir mener des raisonnements avec un paramètre libre. L'exercice I (qui se borne l'étude de trois fonctions d'une variable réelle) et la partie (A) du problème (où l'on demandait simplement de diagonaliser une matrice 2×2) nous semblent relever d'un niveau d'abstraction minimal exigible pour l'épreuve de mathématiques de la filière B/L.

Un nombre significatif de copies ne résolvent les questions I.1–5 et III.1–2 que pour des valeurs particulières des paramètres ($p = q = 1/2$ ou $x = 0.5$ dans l'exercice I, $p, q \in \{0, 1\}$ dans le problème), ce qui a fait perdre de nombreux points, même aux candidats que l'on devinait proches de résoudre le cas général.

Avant de rentrer dans le détail des exercices, voici quelques conseils aux candidats pour la rédaction de leur copie :

– Il est souhaitable de présenter sa copie le plus clairement possible. En particulier, le jury apprécie que les réponses à un même exercice soient présentées dans l'ordre, et qu'en tout cas les éléments de réponse à une même question soient rassemblés en un seul endroit, sauf mention explicite du contraire !
– Plusieurs candidats prennent dans leur copie des libertés avec les notations introduites dans le sujet, par exemple, appeler f la fonction nommée g à la question I.5. Cela peut être très troublant pour le correcteur, et peut conduire à pénaliser gravement le candidat.
– Pour un bon nombre de questions d'analyse, tracer un tableau de variation peut s'avérer la plus claire des justifications (ici, pour les questions I.2,4–5), à condition bien sûr de ne pas oublier de répondre à la question posée. Au sujet des questions I.4–5, il est d'ailleurs assez étrange d'avoir vu d'assez nombreuses copies mener une étude complète des fonctions proposées, mais ne pas conclure leur réponse par un graphe qui était pourtant explicitement demandé, et nécessaire à l'obtention de la majorité des points de la question.
– Recopier une question de l'énoncé ne peut jamais rapporter de point et demeure parfaitement inutile.
– Énoncer une affirmation manifestement fausse ne peut pas servir le candidat, mais seulement jeter la suspicion sur tout ce qu'il écrit.

En vue de préciser notre analyse des principales faiblesses observées dans les copies, nous indiquons cette année pour chaque question le nombre de copies ayant obtenu au moins 75% des points (sur un total de 548 candidats présents).

Commentaires détaillés sur chaque exercice

Exercice I. Le premier exercice portait sur l'étude de propriétés élémentaires de la divergence de Kullback-Leibler pour entre des variables de Bernoulli (ce qu'il était, bien évidemment, totalement inutile de réaliser !). Cet exercice d'analyse très classique ne comportait guère de difficulté insurmontable par un candidat moyen, la question I.8 seule demandant de prendre une petite initiative. Il a toutefois été diversement réussi : sur les questions I.1–7, la note médiane est de 21%, seules 39 copies obtenant plus de 75% des points.

1. [281 copies $\geqslant$ 75%] Question élémentaire, même si malheureusement la majorité des candidats ne prennent pas le temps de justifier que la quantité à l'intérieur du logarithme est bien strictement positive pour tout réel t, perdant au passage une (toute petite) fraction de point. Il était apprécié que le candidat fournisse la réponse sous la forme factorisée la plus simple possible.
2. [233 copies $\geqslant$ 75%] Question assez bien réussie dès lors que h' et h'' sont correctes, si ce n'est qu'une proportion significative de candidats mélange "$h'(x) = 0$", "h admet un maximum local en x" et "h admet un maximum global en x".
3. [197 copies $\geqslant$ 75%] Manipulations élémentaires, bien faites en général lorsque l'expression de $t^\star$ est correcte.
4. [82 copies $\geqslant$ 75%] Il ne s'agit finalement que d'une question très classique (étude de fonction et tracé de l'allure de son graphe), où la seule petite difficulté est la présence d'un paramètre libre. Malgré cela, la question a été étonnamment peu réussie,

comme si les candidats n'osaient par principe pas se lancer dans le dessin d'un graphe. Quelques erreurs graves, et malheureusement fréquentes :

- des tableaux de variations et graphes tracés hors de l'intervalle de définition $]0,1[$, alors que celui-ci était donné dans l'énoncé,
- des graphiques incohérents avec l'énoncé de la question (6) ; les candidats obtenant des valeurs strictement négatives pour $d(p,q)$ auraient pu repérer leur erreur.

Enfin, il est inutile d'écrire des dérivées partielles, f et g sont des fonctions d'une seule variable.

5. [12 copies $\geqslant$ 75%]   Question encore moins bien réussie que I.4, alors qu'elle n'est pas tellement plus difficile (hormis les demi-tangentes aux bords, que quasiment personne n'a trouvées). Plusieurs copies indiquent que g ayant une limite en 0, elle y admet une asymptote horizontale.
6. [65 copies $\geqslant$ 75%]   Question facile quand on avait fait I.4 ou I.5 (encore fallait-il s'en rendre compte). Bon nombre de candidats, visiblement peu sûrs d'eux, croient nécessaire d'invoquer *à la fois* I.4 *et* I.5. Quelques candidats ont aussi vu qu'on pouvait déduire le résultat de I.3, car $d(p,q) = h(t^\star) \geqslant h(0) = 0$.
7. [36 copies $\geqslant$ 75%]   C'est également une conséquence directe de I.4 ou I.5, ce que tous les candidats ayant trouvé I.6 n'ont pas vu. Il est pourtant classique d'obtenir le cas d'égalité à l'aide d'une analyse attentive de la preuve de l'inégalité. Deux bons candidats ont remarqué que c'était aussi une conséquence de I.3, en utilisant l'unicité du maximum $t^\star$.
8. [aucune copie $\geqslant$ 75%]   Les plus courageux n'ont pu faire mieux que commencer quelques calculs. La solution la plus simple était de fixer x et d'étudier la fonction correspondante de y, comme en I.4.