

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

1 ÉQUATIONS D'ORDRE 1

Exercice 1 (*)

Résoudre :

- 1) $2y' = 1$ avec $y(0) = 2$
- 2) $2y' = a - y$ avec $a \in \mathbf{K}$ et $y(0) = -1$
- 3) $y'' = 4y' + 1$ avec $y(0) = 1$ et $y'(1) = 1$

Exercice 2 (*)

Résoudre :

- 1) $y' = -\tan(x)y + \frac{1}{\cos(x)}$ sur $I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$.
- 2) $y' = \tan(x)y + \frac{1}{\cos(x)}$ sur $I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$.

Exercice 3 (*)

Résoudre :

- 1) $4y' - 3y = 0$.
- 2) $y' + \frac{1}{1+t^2}y = 0$.
- 3) $y' = \frac{2}{1-t^2}y$.
- 4) $y' = t(y+2)$.
- 5) $y' - 3y = e^{3x} + 2xe^x$.
- 6) $y' = y + t$ avec $y(0) = 1$.
- 7) $y' = (1+t)y$.
- 8) $y' + 2ty = t$ avec $y(0) = 1$.
- 9) $y' + 2y = (t-2)^2$.
- 10) $y' = \cos t + y$.
- 11) $4y' + y = \cos(t)$ et $y(0) = 0$.
- 12) $y' - y = \operatorname{sh} t$ et $y(0) = 1$.

2 ÉQUATIONS D'ORDRE 2

Exercice 4 (*)

Résoudre les équations différentielles suivantes :

- 1) $y'' + y' - 2y = 1$ avec $y(0) = y'(0) = 0$.
- 2) $y'' - 4y' + 4y = 4$ avec $y(0) = y'(0) = 1$.
- 3) $y'' + y' + \frac{y}{2} = 1$ avec $y(0) = y'(0) = 0$
- 4) $y'' - 2y' + y = 1$ avec $y(0) = y'(0) = 1$.
- 5) $y'' - 2y' = 1$ avec $y(0) = y'(0) = 1$.
- 6) $y'' = 1$ avec $y(0) = y'(0) = 1$.
- 7) $y'' = -y$ avec $y(0) = y'(0) = 1$.

Exercice 5 (*)Résoudre dans $\mathbf{R}$ les équations suivantes :

- 1) $y'' + y' + y = \cos(2x)$.
- 2) $y'' + y = \cos(x)$.
- 3) $y'' + 4y = \sin(2x)$.
- 4) $y'' + y' - 2y = xe^{-2x}$.
- 5) $y'' - 4y' + 4y = (x^3 + x)e^{2x}$.

Exercice 6 ()**Pour quelles valeurs des réels a et b , chaque solution sur $\mathbf{R}$ de l'équation

$$y'' + ay' + by = 0$$

s'annule-t-elle en une infinité de points ?

Exercice 7 (*)Soit $\omega_0 \geq 0$. Résoudre suivant les valeurs de ω :

$$y'' + \omega_0^2 y = \cos(\omega t).$$

3 CHANGEMENT D'INCONNUE OU DE VARIABLE

Exercice 8 (*)

Résoudre l'équation différentielle $y' = y \ln y$. On pourra poser $y(t) = e^{z(t)}$.

Exercice 9 (*)

Résoudre sur $]0, +\infty[$, l'équation différentielle :

$$(E) \quad x^2 y'' + 4xy' - (x^2 - 2)y = 0.$$

On pourra poser z tel que : $\forall x > 0, z(x) = x^2 y(x)$.

Exercice 10 ()**

Résoudre l'équation différentielle sur $\mathbf{R}_+^*$

$$(E) \quad x^2 y'' + 4xy' - 2y = 0.$$

avec le changement de variable $x = e^t$.

Exercice 11 (*)**

Trouver un changement de variable $x = g(t)$ qui transforme cette équation en équation différentielle linéaire à coefficients constants. Puis résoudre. (a est constant)

$$(1 + x^2)^2 y'' + 2x(1 + x^2)y' + a^2 y = 0.$$

4 RETROUVER L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

Exercice 12 ()**

Trouver toutes les fonctions f continues sur $\mathbf{R}_+$ telles que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \quad \int_0^x (2x - 3t)f(t)dt = \frac{x^2}{2}.$$

Exercice 13 ()**

Trouver toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ telles que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f'(x) + f(-x) = -2(x+1)e^x.$$

Exercice 14 (*)**

Déterminer toutes les fonctions dérivables de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x+y) = f(x)f(y).$$

5 ENTRAÎNEMENT

Exercice 15 ()**

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dérivables sur $\mathbf{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f'(x) = f(-x).$$

Exercice 16 ()**

Trouver toutes les fonctions f continues sur $\mathbf{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad 2f(x) = 3x \int_0^x f(t) dt.$$

Exercice 17 (*)**

Résoudre l'équation différentielle $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$.

Exercice 18 (*)**

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ continues sur $\mathbf{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t) dt.$$

Exercice 19 (*)**

1) Déterminer toutes les solutions $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ de l'équation :

$$(E) \quad xy' - 3y = 0.$$

2) Résoudre les équations suivantes sur $\mathbf{R}$ (tout entier) :

$$(E_1) \quad xy' - 2y = x \quad \text{et} \quad (E_2) \quad xy' + 2y = x.$$

3) Soit l'équation $(E) \quad xy' - 2|y| = x$.

(a) Montrer que (E) n'a pas de solution sur $\mathbf{R}$.

(b) Donner et tracer les solutions de (E) , définies sur $\mathbf{R}_+^*$.

6 CCINP

Exercice 20 (CCINP 42)

On considère les équations différentielles suivantes :

$$(H) : 2xy' - 3y = 0 \quad \text{et} \quad (E) : 2xy' - 3y = \sqrt{x}.$$

1) Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

2) Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

3) L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0, +\infty[$?