Déterminants

1 Groupe symétrique

Exercice 1 (*)
Pour tout $\sigma \in S_n$, calculer
$$\sum_{i=1}^{n} \sigma(i).$$

Exercice 2 (**)
Montrer que pour toute permutation $\sigma \in S_n$,
$$\sigma^{n!} = \mathrm{Id}.$$

Exercice 3 (**)
Montrer que toute permutation $\sigma \in S_n$ peut s'écrire comme produit de transpositions de la forme $(1,\, i)$ avec $i \in [\![2,\, n]\!]$.

Exercice 4 (**)
On définit la fonction
$$f\ :\ \left\{\begin{array}{ccc} S_n & \to & \mathbf{N} \\ \sigma & \mapsto & \sum\limits_{k=1}^{n} k\sigma(k). \end{array}\right.$$
Montrer que f admet un maximum et un minimum sur S_n et les déterminer.

Exercice 5 (***)
Montrer que la signature est l'unique morphisme non constant de $(S_n,\, \circ)$ dans $(\mathbf{C}^*,\, \times)$.

2 Révisions de calcul matriciel

Exercice 6 (*)
Soient $b_1 = (1, 1, 2)$, $b_2 = (-2, -1, 3)$ et $b_3 = (0, -3, -1)$ trois vecteurs de $\mathbf{R}^3$.

1) Montrer que $\mathscr{B} = (b_1, b_2, b_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
2) On note $F = \mathrm{Vect}\,(b_1, b_2)$ et $G = \mathrm{Vect}\,(b_3)$, que peut-on dire de F et G ?
3) Soit p le projecteur sur F parallèlement à G, exprimer $M = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(p)$.
4) Soit $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$, on note $N = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(p)$.
   Calculer $P = \mathrm{Pa}_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$, quelle est la relation entre M, N et P ?

Exercice 7 (*)
Montrer que toute matrice triangulaire supérieure est semblable à une matrice triangulaire inférieure.

Exercice 8 (**)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $A^3 - A^2 - 4A = -4I_3$.
Calculer A^p pour tout $p \in \mathbf{N}$.

Exercice 9 (**)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Montrer que A et A' sont semblables et déterminer la matrice de passage.

Exercice 10 (**)
Les matrices $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ? Si oui, déterminer la matrice de passage.

Exercice 11 (**)
Montrer que toute matrice peut s'écrire comme la somme de deux matrices inversibles.

Exercice 12 (***)
Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, telle que $A + A^{-1} = I_n$. Déterminer $A^k + A^{-k}$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

Exercice 13 (**)
Soient (u_n) et (v_n) deux suite définies par $u_0 = 2, v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N}^*$,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & 5u_n - 3v_n \\ v_{n+1} & = & 6u_n - 4v_n \end{array} \right. .$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1) Donner une relation entre X_{n+1} et X_n en fonction d'une matrice A. En déduire une expression de X_n en fonction de A et de n.

2) Déterminer une base de $\ker(A + I_2)$ et de $\ker(A - 2I_2)$.

3) En déduire l'existence d'une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

4) Exprimer P.

5) Exprimer u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 14 (***)
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
On dit que $\lambda \in \mathbf{K}$ est valeur propre de f s'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ qui vérifie $f(x) = \lambda x$.

1) Soient $(\lambda_1, \cdots, \lambda_k) \in \mathbf{K}^k$ k valeurs propres distinctes de f.
Pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, on note $x_i \in E \setminus \{0\}$ tel que $f(x_i) = \lambda_i x_i$.

   (a) Soit $(\alpha_1, \cdots, \alpha_k) \in \mathbf{K}^k$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = 0$.

   Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$ $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} P(\lambda_i)\, \alpha_i x_i = 0$.

   (b) Montrer que $(x_1, \cdots, x_k)$ forme une famille libre de E.

2) On suppose E de dimension finie égale à n et on suppose que $f \in \mathscr{L}(E)$ admet n valeurs propres distinctes.
Montrer qu'il existe une base de E en laquelle la matrice de f est diagonale.

3) On suppose toujours $\dim(E) = n$ et $(\lambda_1, \cdots, \lambda_k) \in \mathbf{K}^k$ toutes les valeurs propres (distinctes) de f.
Montrer que f est diagonalisable (ie qu'il existe une base en laquelle la matrice de f est diagonale) si, et seulement si $\sum\limits_{i=1}^{k} \dim\left(\ker(f - \lambda_i \mathrm{Id})\right) = n$.

Exercice 15 (***)
Soit $A \in \mathscr{A}_n(\mathbf{K})$ antisymétrique. Montrer que $A + I_n$ est inversible.

3 Calculs de déterminants

Exercice 16 (*)
Calculer

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Exercice 17 (*)
Calculer

$$\begin{vmatrix} (0) & & & a_n \\ & & \iddots & \\ & a_2 & & \\ a_1 & & & (0) \end{vmatrix}.$$

Exercice 18 (*)
Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Calculer

$$\begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \cdots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \cdots & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_n \end{vmatrix}$$

où pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$ on a $S_k = \sum\limits_{i=1}^{k} i$.

Exercice 19 (**)
Calculer

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}.$$

Exercice 20 (**)
Calculer

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{vmatrix}.$$

Exercice 21 (**)
Calculer

$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & ab \\ b^2 & ab & a^2 \\ ab & a^2 & b^2 \end{vmatrix}$$

Exercice 22 (**)
Calculer

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$$

Exercice 23 (**) (méthode)
Soit $a \in \mathbf{K}^*$. Pour tout $n \geqslant 1$, calculer le déterminant de taille n :

$$D_n = \begin{vmatrix} 2a & a & & (0) \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ (0) & & a & 2a \end{vmatrix}.$$

Exercice 24 (**)
Soit $a \in \mathbf{K}$. Pour tout $n \geqslant 1$, on définit le déterminant de taille n par :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & 1 & & (0) \\ 1 & a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & a \end{vmatrix}.$$

Calculer Δ_n pour $a = -1$ et pour $a = 2$.

4 Applications linéaires

Exercice 25 (*)
Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbf{K}_n[X])$ défini par

$$f(P) = P + P'.$$

Calculer $\det f$, que peut-on en déduire ?

Exercice 26 (*)
Soit E un $\mathbf{K}-$espace vectoriel de dimension n et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

1) Calculer le déterminant du projecteur sur F parallèlement à G.

2) Calculer le déterminant de la symétrie sur F parallèlement à G.

Exercice 27 (**)
Pour $\sigma \in S_n$, on définit

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^n & \to & \mathbf{K}^n \\ (x_1, \cdots, x_n) & \mapsto & \left(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)}\right). \end{array} \right.$$

1) Montrer que $u \in \mathrm{GL}(\mathbf{K}^n)$.

2) Calculer $\det(u)$.

5 Entraînement

Exercice 28 (anciennement CCINP 63)
Soit un entier $n \geqslant 1$. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour $n \geqslant 1$, on désigne par D_n le déterminant de A_n.

1) Démontrer que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.

2) Déterminer D_n en fonction de n.

Exercice 29 (*)
Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$.
Montrer que si $f^2 = -\mathrm{Id}_E$ alors n est pair.

Exercice 30 (**)
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, on définit $\chi_M = \det(XI_n - M)$.

1) Démontrer que $\chi_M \in \mathbf{K}_n[X]$.
Déterminer son terme de plus haut degré et son terme constant.

2) En déduire qu'il existe $k_M \in \mathbf{N}^*$ tel que

$$\forall k \geqslant k_M, \quad M - \frac{1}{k} I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K}).$$

Exercice 31 (**)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{Z})$ une matrice à coefficients entiers.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur son déterminant pour que A soit inversible dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{Z})$ (que son inverse soit aussi à coefficients entiers).

Exercice 32 (**)
Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et $J \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1) Montrer que $\det(A + XJ) \in \mathbf{R}_1[X]$ et donner son terme constant.
X représente l'indéterminée des polynômes.

2) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ avec $\alpha \neq \beta$ et $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, calculer

$$\begin{vmatrix} a_1 & & & (\alpha) \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ (\beta) & & & a_n \end{vmatrix}.$$

3) On suppose A antisymétrique et n pair. Montrer alors que

$$\det(A + XJ) = \det A.$$

Exercice 33 (***)
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

1) Montrer que A est inversible.

2) On suppose de plus $\forall i \in \{1, ..., n\}, a_{i,i} > 0$. Montrer que $\det A > 0$.

Exercice 34 (***)
On considère quatre matrices réelles de taille $n \geqslant 1$: A, B, C, D telles que D inversible et $CD = DC$.
On définit par blocs la matrice

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Montrer que
$$\det(M) = \det(AD - BC).$$

Montrer que ce résultat est encore vrai si D n'est pas inversible.