

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Exercice 1 (Ouverts)

- 1) Montrer que toute union d'ouverts est encore un ouvert.
- 2) Montrer que toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.
- 3) Trouver une intersection d'ouverts qui n'est pas un ouvert.
Indication : s'inspirer des ouverts de $\mathbf{R}$.

Exercice 2 (**)

Montrer qu'une fonction f est continue si, et seulement si l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert.

Exercice 3 (*)

Représenter graphiquement le domaine de définition de la fonction

- 1) $f : (x, y) \mapsto \ln\left(\frac{x}{y}\right)$
- 2) $f : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 - y^2}$
- 3) $f : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 - y}$
- 4) $f : (x, y) \mapsto \sqrt{xy}$
- 5) $f : (x, y) \mapsto \frac{1}{x^2 + y^2 + xy}$

Exercice 4 (*)

Étudier les extrema locaux des fonctions suivantes (sur leur domaine de définition)

- 1) $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$
- 2) $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$
- 3) $f : (x, y) \mapsto x^3 + y^3$
- 4) $f : (x, y) \mapsto x^4$
- 5) $f : (x, y) \mapsto \frac{1}{x^2 + 2y^2 + 1}$
- 6) $f : (x, y) \mapsto \frac{1}{x^2 + 2y^2 + 4(x - y) + 3}$
- 7) $f : (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 9xy$

Exercice 5 (*)

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ et $g : t \mapsto f(2 + 2t, t^2)$.

- 1) Démontrer que $g \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$.
- 2) Calculer la dérivée de g en fonction des dérivées partielles de f .
- 3) Soit $h : (u, v) \mapsto f(uv, u^2 + v^2)$.
Montrer que $h \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ et calculer ses dérivées partielles en fonction de celles de f .

Exercice 6 (**)

On veut déterminer l'existence et l'équation de la droite de régression linéaire à partir de sa caractérisation :

« la droite $f(x) = ax + b$ qui minimise la somme des carrés des distances entre les points (x_i, y_i) et les points $(x_i, f(x_i))$ pour i décrivant l'échantillon fini. »

On suppose qu'il existe au moins deux valeurs x_i différentes.

- 1) À l'aide des fonctions de deux variables, obtenir l'existence et l'expression de cette droite.
On admettra que si une fonction $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ est continue sur une boule fermée, alors elle admet un maximum et un minimum sur cette boule.
- 2) Retrouver le résultat par un raisonnement d'algèbre.

Exercice 7 (**)

Soit f définie sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par

$$f(x, y) = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{4}}}.$$

Justifier que f est prolongeable par continuité en $(0, 0)$ et étudier l'existence de dérivées partielles en $(0, 0)$ de la prolongée.

Exercice 8 (*)

On considère la demi-sphère ouverte supérieure de $\mathbf{R}^3$ de rayon $R > 0$ telle que $z > 0$.

- 1) Déterminer une paramétrisation sous la forme $z = f(x, y)$ avec $f \in \mathcal{C}^1$ sur un ouvert à préciser.
- 2) Montrer qu'on trouve bien que $(0, 0)$ est l'unique maximum (local et global) de cette surface.
- 3) En s'aidant du gradient, retrouver que les plans tangents sont orthogonaux aux rayons (des points pour lesquels sont définis les plans tangents).

Exercice 9 (CCINP 33)

On pose : $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et $f(0, 0) = 0$.

- 1) Démontrer que f est continue sur $\mathbf{R}^2$.
- 2) Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbf{R}^2$.
- 3) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$? Justifier.

Exercice 10 (CCINP 52)

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$.

On considère l'application définie sur $\mathbf{R}^2$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2 + y^2 - xy} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- 1) Prouver que : $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, x^2 + y^2 - xy \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.
- 2) (a) Justifier que le domaine de définition de f est bien $\mathbf{R}^2$.
(b) Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbf{R}^2$.
- 3) Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$.
(a) Justifier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et les calculer.
(b) Justifier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ et donner leur valeur.
(c) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$?

Exercice 11 (CCINP 56)

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ par : $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, f(x, y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$.

- 1) f admet-elle des extrema locaux sur $\mathbf{R}^2$? Si oui, les déterminer.
- 2) f admet-elle des extrema globaux sur $\mathbf{R}^2$? Justifier.
- 3) On pose $K = [0, 1] \times [0, 1]$.
Justifier, oralement, que f admet un maximum global sur K puis le déterminer.

Exercice 12 (CCINP 57)

- 1) Soit f une fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$.

- (a) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0, 0)$.
- (b) Donner la définition de « f différentiable en $(0, 0)$ ».

- 2) On considère l'application définie sur $\mathbf{R}^2$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}^2$.
- (b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$.