TD 4 - Sommes

Exercice 1
On considère pour tout n entier, $n \geqslant 2$

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \qquad \text{et} \qquad T_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}.$$

1) (a) Pour $n \geqslant 2$, donner une expression simple de la somme S_n en fonction de n.
(expression qui n'utilise pas le signe somme, ni les points de suspension !)

(b) Étudier la convergence de la suite $(S_n)_{n \geqslant 2}$, et donner sa limite (si elle en a une).

2) (a) Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto x - \ln(1+x)$ sur son domaine de définition.

(b) Donner le signe de f sur son domaine de définition.

(c) En déduire que, pour tout $n \geqslant 2$, $S_n \leqslant T_n$.

(d) Déterminer la limite de T_n quand n tend vers $+\infty$.

(e) Donner une valeur de n pour laquelle $T_n > 100$. Justifier.

Exercice 2
Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, on définit

$$K_n(x) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor .$$

1) Soit $x \in \mathbf{Z}$,

(a) Pour $n \in \mathbf{N}^*$, calculer $K_n(x)$.

(b) Montrer que la suite $(K_n(x))_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge vers un réel que l'on précisera.

2) Soit $x \in \mathbf{R}$, montrer que la suite $(K_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge et calculer sa limite.