

CONVERGENCE DES SUITES

1 POUR COMMENCER

Exercice 1 (Vrai / Faux)

Répondre en justifiant.

- 1) Le produit de deux suites majorées est-il nécessairement majoré ?
- 2) Une suite non croissante est-elle nécessairement décroissante ?
- 3) Une suite qui converge vers une limite strictement positive ℓ a-t-elle tous ses termes strictement positifs à partir d'un certain rang ?
- 4) Une suite à termes positifs qui tend vers 0 est-elle nécessairement décroissante à partir d'un certain rang ?
- 5) La somme (ou la différence) de deux suites divergentes est-elle nécessairement divergente ?
- 6) Existe-t-il une suite divergente $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$?
- 7) Une suite divergente est-elle nécessairement non bornée ?
- 8) Une suite non bornée est-elle nécessairement divergente ?
- 9) Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent, alors (u_n) converge-t-elle nécessairement ?

Exercice 2 (*)

Soit (u_n) une suite monotone telle que (u_{2n}) converge.

Montrer que (u_n) converge.

Exercice 3 (*)

On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ définies ci-après. Montrer que les suites sont adjacentes et qu'elles convergent.

- 1) $\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n}.$
- 2) $\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n^2}.$

Exercice 4 (*)

Étudier la suite z définie par

$$\forall n \in \mathbf{N}, z_n = (-1)^n e^{in\frac{\pi}{2}}.$$

2 SUITES DÉFINIES EXPLICITEMENT

2.1 Nature et limite

Énoncé commun à tous les exercices de cette partie :

Vérifier que la suite est bien définie, trouver sa nature (avec démonstration), et calculer sa limite si elle existe.

Exercice 5 (*)

- 1) $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}.$
- 2) $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = \frac{3n^2 - 2n + 1}{n\sqrt{n} + n - 1}.$
- 3) $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = \frac{3n^2 - 2n + 1}{n^6 - 2n^4 - 9}.$
- 4) $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = \frac{n^3 + 5n}{5n^3 + \cos(n) + \frac{1}{n^2}}.$

Exercice 6 (*)

- 1) $\forall n \in \mathbf{N}, u_n = \sqrt{1 + n^2} - \sqrt{1 + n}.$
- 2) $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}.$
- 3) $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = \frac{\sqrt{(n+1)(n+3)} + \sqrt{n}}{n}.$
- 4) $\forall n \in \mathbf{N}, u_n = n - \sqrt{(n+1)(n+3)} - \sqrt{n}.$

Exercice 7

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = \frac{n \cos(\pi\sqrt{n}) - \sqrt{n}}{n + \sqrt{n}}.$$

Exercice 8 (**)

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}.$$

2.2 Nature

Énoncé commun à tous les exercices de cette partie :

Vérifier que la suite est bien définie, trouver sa nature (avec démonstration),

Exercice 9 ()**

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{kn}.$$

Exercice 10 (*)**

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Exercice 11 (*)**

Montrer que la suite $(\sin(n))_{n \in \mathbf{N}}$ diverge.

Exercice 12 (*)**

Pour $\alpha \in \mathbf{R}$, on définit la suite u par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = \frac{\ln(n!)}{n^\alpha}.$$

Déterminer la nature de la suite en fonction de α .

Voir les indications pour des sous-questions.

3 SUITES ET PRIMITIVES

Exercice 13 ()**

Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose

$$u_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt \quad \text{et} \quad v_n = \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt.$$

- 1) Montrer que la suite u est strictement décroissante.
- 2) Montrer que la suite v est majorée.
- 3) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $0 \leq 1-x \leq e^{-x}$ et en déduire que u converge vers 0.
- 4) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} u_n$.
- 5) En déduire une expression simple de u_n .

Exercice 14 (*)**

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit

$$\begin{cases} u_n &= \int_0^1 \frac{t^n}{1+e^t} dt \\ v_n &= \int_0^n \frac{t^n}{1+e^t} dt \\ w_n &= \int_0^n \frac{t}{1+e^t} dt \end{cases}$$

Étudier la nature de chacune de ces suites.

4 EXERCICES THÉORIQUES

Exercice 15 () (à connaître)**

Soit u une suite à valeurs non nulles.

On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \ell \in \mathbf{R}$.

- 1) Montrer que si $\ell \in]-1, 1[$, alors la suite converge vers 0.
- 2) Montrer que si $\ell \in]1, +\infty[\cup \{+\infty\}$, alors la suite est de signe constant à partir d'un certain rang et diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$.
- 3) Montrer que si $\ell \in]-\infty, -1[\cup \{-\infty\}$, alors la suite diverge sans admettre de limite.
- 4) Montrer que si $\ell = -1$ ou $\ell = 1$, alors on ne peut pas conclure a priori (donner des exemples de convergence et de divergence).

Exercice 16 ()**

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de $[0, 1]^{\mathbf{N}}$ telles que $(u_n v_n)$ converge vers 1.

Montrer que (u_n) et (v_n) convergent.

Exercice 17 ()**

Soit une suite réelle telle que

$$\forall (k, n) \in (\mathbf{N}^*)^2, 0 \leq u_n \leq \frac{k}{n} + \frac{1}{k}.$$

Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers 0.

5 PREMIÈRES SUITES RÉCURRENTES

Exercice 18 (*)

Étudier les suites (u_n) définies par

- 1) $u_0 \in \mathbf{R}$ et $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{n+1}$.
- 2) $u_0 \in \mathbf{R}$ et $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 4$.
- 3) $u_0 \in \mathbf{R}$ et $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = \sqrt{\frac{3}{4} + u_n^2}$.
- 4) $u_0 \in \mathbf{R}$ et $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n + u_n^2}$.
- 5) $u_0 \in \mathbf{R}$ et $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = \sqrt{1 - u_n + u_n^2}$.
- 6) $u_0 \in \mathbf{R}$ et $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = 1 - \cos u_n$.

Exercice 19 (**)

Soit la suite (u_n) définie par

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}.$$

- 1) Vérifier que (u_n) est bien définie.
- 2) Si la suite converge, que vaut sa limite ?
- 3) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}, |u_{n+1} - 1| \leq \frac{2}{3}|u_n - 1|$.
- 4) Conclure sur la convergence de (u_n) .

Exercice 20 (***)

Étudier la suite u définie par

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{avec} \quad f : x \mapsto \frac{1}{2} \cos(x).$$

6 DENSITÉ

Ces exercices sont plus difficiles et ne sont donc pas prioritaires.

Exercice 21 (**)

On admet que $\mathbf{Z} + 2\pi\mathbf{Z}$ est dense dans $\mathbf{R}$.

- 1) Montrer que $\{\sin(n)\}_{n \in \mathbf{N}}$ est dense dans $[-1, 1]$.
- 2) Montrer que tout $x \in [-1, 1]$, est valeur d'adhérence de la suite $(\sin(n))_{n \in \mathbf{N}}$.

Exercice 22 (***)

Soient u et v deux suites de nombres réels telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} - u_n = 0.$$

- 1) Montrer que $\{u_p - v_q, (p, q) \in \mathbf{N}^2\}$ est dense dans $\mathbf{R}$.
- 2) Montrer que $\{\cos(\ln(n)), n \in \mathbf{N}^*\}$ est dense dans $[-1, 1]$

Exercice 23 (***)

Soit A une partie non vide de $\mathbf{R}$.

- 1) On suppose que

$$\forall (a, b) \in A^2, \frac{a+b}{2} \in A.$$

Montrer que A est dense dans $] \inf A, \sup A[$.

- 2) On suppose $A \subset \mathbf{R}_+^*$ tel que

$$\forall (a, b) \in A^2, \sqrt{ab} \in A.$$

Montrer que A est dense dans $] \inf A, \sup A[$.

7 ENTRAÎNEMENT

Exercice 24 ()**

Montrer qu'une suite de $\mathbf{Z}^{\mathbf{N}}$ converge si, et seulement si elle est stationnaire.

Exercice 25 ()**

Soit la suite harmonique $(H_n)_{n \geq 1}$ définie pour tout $n \geq 1$ par $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

- 1) Étudier la nature de la suite extraite (H_{2^n}) .
- 2) En déduire la nature de (H_n) et son éventuelle limite.

Exercice 26 ()**

Soit une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}.$$

Montrer que la suite diverge vers $+\infty$.

Exercice 27 ()**

Soient a et b deux réels positifs. Soient u et v les suites initialisées par $u_0 = a$ et $v_0 = b$ et définies par la récurrence : $\forall n \geq 0 \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$.

- 1) (a) Montrer que u et v sont bien définies, puis que :

$$\forall n \geq 1 \quad u_n \leq v_n.$$

- (b) Montrer que u et v sont convergentes et ont la même limite que l'on note $M(a, b)$.
- 2) (a) Calculer $M(0, 1)$ et $M(1, 1)$.
- (b) Montrer que $x \mapsto M(1, x)$ est croissante sur $\mathbf{R}_+$.

Exercice 28 ()**

Montrer qu'une suite bornée converge si, et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

Montrer que c'est faux si la suite n'est pas supposée bornée.

Exercice 29 (*)**

Soit $x \in \mathbf{R}$.

Par densité de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{R}$, il existe une suite $(x_n) \in \mathbf{Q}^{\mathbf{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $x_n = \frac{p_n}{q_n}$ avec $p_n \in \mathbf{Z}$ et $q_n \in \mathbf{N}^*$.

Montrer que si (q_n) est bornée, alors $x \in \mathbf{Q}$.

Exercice 30 (*) (Suites de Cauchy)**

Soit $u \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$.

On dit que u est une *suite de Cauchy* si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall p \geq n_0, \forall q \geq n_0, |u_p - u_q| \leq \varepsilon.$$

- 1) Montrer que u est convergente si, et seulement si u est une suite de Cauchy.
- 2) Soit $(a, b) \in \mathbf{R}$, $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ telle que

$$\exists c \in [0, 1[, \forall (x, y) \in [a, b]^2, |f(x) - f(y)| \leq c|x - y|.$$

On dit que f est contractante.

On admet qu'une fonction contractante est continue.

- (a) Montrer que f admet au plus un point fixe.
- (b) Soit $u_0 \in [a, b]$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Montrer que la suite est de Cauchy.
- (c) En déduire que f admet un unique point fixe sur $[a, b]$.
(théorème du point fixe de Picard)
- (d) Discuter de la validité de ce résultat si on choisit un intervalle autre qu'un segment.

Exercice 31 (*) (Irrationalité de e)**

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{nn!}.$$

- 1) Montrer que (u_n) et (v_n) ont une limite commune.
- 2) On admet que cette limite est $e = \exp(1)$. Montrer que e est irrationnel.
Indication : Poser par l'absurde $e = \frac{p}{q}$, et comparer avec u_q et v_q .

Exercice 32 (*)**

Soit (u_n) une suite à valeurs positives telle que

$$\forall (p, q) \in \mathbf{N}^2, \quad u_{p+q} \leq u_p + u_q.$$

- 1) Justifier que $\inf_{n \in \mathbf{N}^*} \frac{u_n}{n}$ existe.
- 2) Montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n > 0}$ converge et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = \inf_{n \in \mathbf{N}^*} \frac{u_n}{n}.$$

On pourra pour $q \in \mathbf{N}^*$ fixé et $n \geq q$, écrire $n = kq + r$ avec $r \in [0, q - 1]$.

Exercice 33 (*) (Césaro et l'escalier)**1) (*Césaro*)Soit u une suite réelle qui converge vers $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k = \ell.$$

Utiliser la définition quantifiée. On pourra commencer par le cas $\ell = 0$.

2) La réciproque est-elle vraie ?

3) Soit u une suite réelle telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} - u_n = \ell \in \overline{\mathbf{R}}$.Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = \ell$.4) Soit u_n une suite réelle qui converge vers $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$.On considère une suite α strictement positive telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \alpha_k = +\infty$.

Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k u_k}{\sum_{k=1}^n \alpha_k} = \ell.$$

Exercice 34 (CCINP 43)Soit $x_0 \in \mathbf{R}$.On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n)$.1) (a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0 , le sens de variation de (u_n) .(b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.2) Déterminer l'ensemble des fonctions h , continues sur $\mathbf{R}$, telles que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, h(x) = h(\text{Arctan } x).$$