TD 3 - SUITES

Exercice 1
On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $x_0 \in]0,1[$, et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_{n+1} = x_n - x_n^2$.

1) Dresser le tableau de variation de la fonction f à valeurs dans $\mathbf{R}$, définie sur $[0,1]$, par : $f(x) = x - x^2$.

2) **(a)** Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est monotone et convergente.
(b) Déterminer la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

3) **(a)** Établir pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'encadrement $0 < x_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
(b) Retrouver ainsi la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

4) Soit $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n = nx_n$.
(a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante.
(b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un réel ℓ que l'on ne demande pas de calculer.
(c) Montrer que $0 < \ell \leqslant 1$.

5) On considère les suites $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad w_n = n\,(v_{n+1} - v_n) \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{w_k}{k}.$$

(a) Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente.
(b) Exprimer pour tout $n \in \mathbf{N}$, w_n en fonction de x_n et de v_n.
(c) En déduire que la suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\ell\,(1-\ell)$.
(d) À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que $\ell = 1$.
Indication : on pourra utiliser un résultat déjà prouvé en exercice.

Exercice 2
On considère deux réels A et B tels que $0 < A \leqslant B$. On définit deux suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par récurrence :

$$x_0 = A,\ y_0 = B \text{ et}, \forall n \in \mathbf{N},\ x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \text{ et } y_{n+1} = \sqrt{x_{n+1}\,y_n}\,.$$

1) Justifier que ces deux suites sont correctement définies et à termes strictement positifs.

2) Justifier que l'on peut définir un réel $\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $A = B \times \cos(\alpha)$.
On ne demande pas la valeur de α.

3) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{y_n}{y_{n-1}}$ et $\dfrac{y_{n+1}}{y_n} = \sqrt{\dfrac{1 + \dfrac{y_n}{y_{n-1}}}{2}}$.

4) **Expression du quotient $\dfrac{y_n}{y_{n-1}}$**
On rappelle que, pour tout réel x,
$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$ et $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$.
(a) Montrer que, pour tout $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}} = \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$.
(b) En déduire par récurrence que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\dfrac{y_n}{y_{n-1}} = \cos\left(\dfrac{\alpha}{2^n}\right)$.

5) **Expression et limite de y_n**
(a) On suppose que $\alpha \neq 0$, montrer alors que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $y_n = \dfrac{B\sin\alpha}{2^n\,\sin\left(\dfrac{\alpha}{2^n}\right)}$.
(b) Si $\alpha = 0$, donner l'expression de y_n en fonction de $n \in \mathbf{N}$.
(c) Rappeler la limite de $\dfrac{\sin x}{x}$ lorsque x tend vers 0 ; et en déduire la limite de y_n quand n tend vers $+\infty$.
On pourra faire apparaître un taux d'accroissement en 0 pour calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$.