

FRACTIONS RATIONNELLES

1 CALCULS

Exercice 1 (*)

Décomposer en éléments simples sur $\mathbf{R}$ et sur $\mathbf{C}$

$$1) \quad F_1 = \frac{X^3}{(X-1)(X+2)}.$$

$$2) \quad F_2 = \frac{X^5 + 1}{X(X-1)}.$$

$$3) \quad F_3 = \frac{1}{(X-1)^2(X+2)^2}.$$

Exercice 2 (*)

Décomposer en éléments simples sur $\mathbf{R}$ et sur $\mathbf{C}$

$$1) \quad F_2 = \frac{X^2}{(X^2-1)(X^2+1)}.$$

$$2) \quad F_3 = \frac{X^4 + 1}{X^2 - 1}.$$

$$3) \quad F_4 = \frac{X^3}{(X^4 + X^2 + 1)}.$$

Exercice 3 ()**

Calculer les intégrales suivantes :

$$1) \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{dt}{\sin t}.$$

$$2) \quad \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{4 - \cos^2(t)} dt.$$

$$3) \quad \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^3(t)}.$$

2 ENTRAÎNEMENT

Exercice 4 ()**

Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ scindé à racines simples (et non nulles) sur $\mathbf{R}$.

On suppose $\deg P = n$ et on note $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ ses racines.

Montrer que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k P'(x_k)} = -\frac{1}{P(0)}.$$

Exercice 5 (*)**

Soit P un polynôme de degré n dans $\mathbf{C}[X]$, $a \in \mathbf{C}$ une racine simple et $(x_1, \dots, x_{n-1})$ ses autres racines (non nécessairement distinctes).

On note $y_1, \dots, y_{n-1}$ les racines de P' .

Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a - x_k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a - y_k}.$$

Exercice 6 (*)**

Soient $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$, $n-1$ réels strictement positifs et A_n quelconque.

Soient n -réels $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

On pose

$$F = \frac{A_1}{X - a_1} + \frac{A_2}{X - a_2} + \dots + \frac{A_n}{X - a_n}.$$

On note sa forme irréductible $\frac{P}{Q}$.

1) Montrer que $\deg P \leq n-1$.

2) Montrer que toutes les racines de P sont réelles.