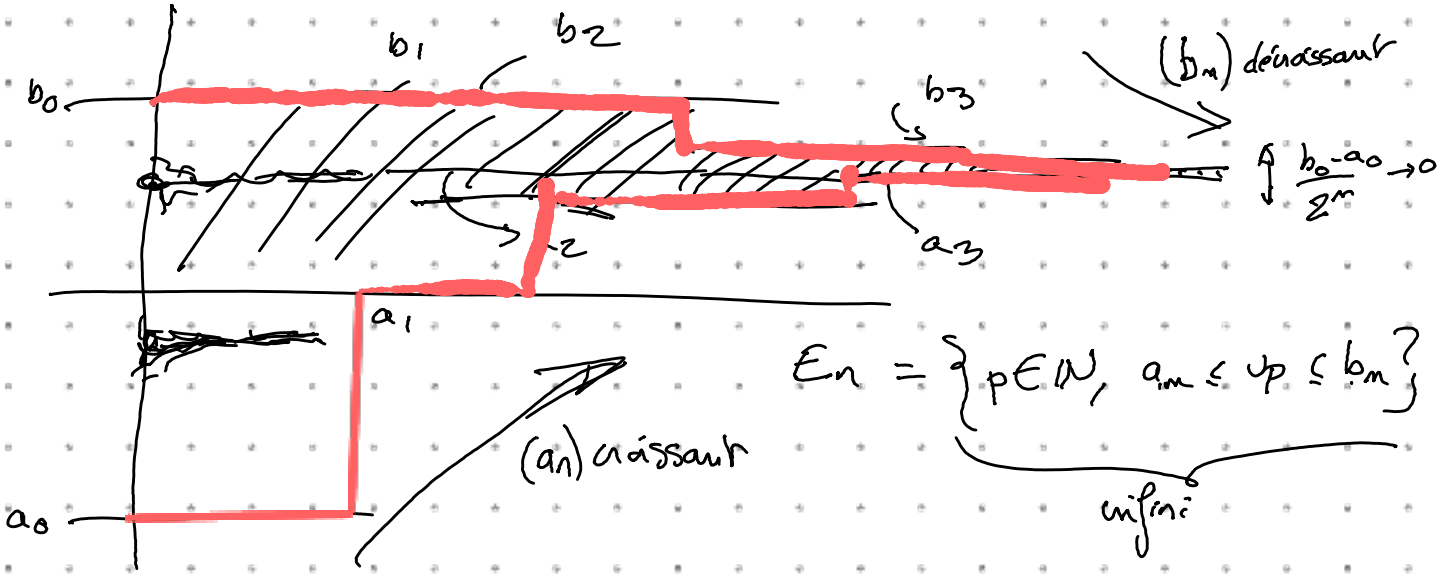
... par construction $\begin{cases} (u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite extraite de } u. \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq u_{\varphi(n)} \leq b_n \end{cases}$

P $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \ell$

par théorème d'encadrement

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = \ell$



$\varphi(0) = \min(E_0) = 0$

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n+1) = \min\left(E_{n+1} \setminus \{0, 1, 2, \dots \varphi(n)\}\right)$

non vide de $\mathbb{N}$

Exercice montrer que si u admet une suite extraite convergente, alors elle en admet une infinité.

Solution soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u \circ \varphi$ converge avec φ fonction d'extraction.

idée ① $\forall n \in \mathbb{N}$, $\psi(n) = \left\lfloor \frac{\varphi(n)}{2} \right\rfloor$ → $u \circ \varphi$ converge ? pas certain.

② suites extraite de $u \circ \varphi$: OUI toutes les suites extraites de $u \circ \varphi$ convergent (vers la même limite).

③ ajouter ou retirer certains termes.
↳ NON : pas suite extraite

OUI : formaliser l'extraction

$u \circ \varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

on les retire un par un

$\psi_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array}$

$u_5, u_7, u_{21}, \ldots$ $u_{374} \ldots$

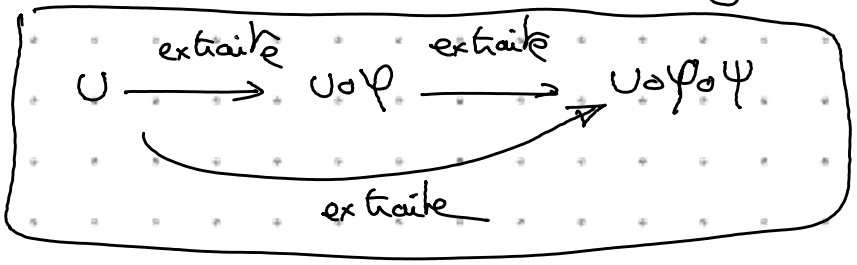
$\psi_0(0)$ ($u_{\varphi(0)}, u_{\varphi(1)}, u_{\varphi(2)} \ldots$ $u_{\varphi(n)} \ldots$

$u_{\varphi\psi_0(0)}, u_{\varphi\psi_0(1)}, \ldots, u_{\varphi\psi_0(n-1)}$

φ strictement croissante ? $\varphi \circ \psi_0$ strictement croissante pour ψ_0

ψ_0 " " " "

$(u_{\varphi\psi(n)})$ suite extraite de u, et une suite extraite de $(u_{\varphi(n)})$ donc converge vers la même limite



$\psi_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n+2 \end{array}$ $\psi_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n+3 \end{array}$

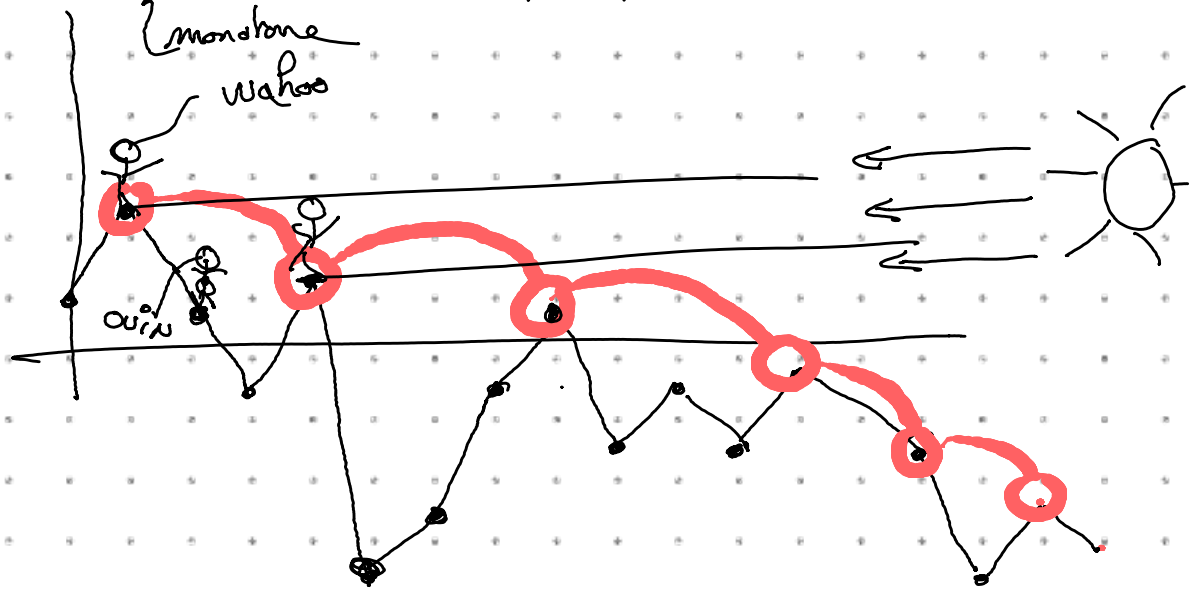
$\forall k \in \mathbb{N}$, $\psi_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n+k+1 \end{array}$

$\forall k \in \mathbb{N}$, la suite $(u_{\varphi_0 \varphi_k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de u qui converge vers $\lim_{n \to +\infty} u_{\varphi(n)}$

Exercice pour une preuve alternative de Bolzano-Weierstraß.

Lemme des pics, ou du soleil levant

De toute suite réelle, on peut extraire une sous suite monotone



W (positions) des sommets Wahoo ! $\neq u_n$ altitude

$$W = \{p \in \mathbb{N},\ \forall n \geq p,\ u_n \leq u_p\}$$

2 possibilités **1er cas** : la vie est une romance sans fin.

Si W est infini

on prend les éléments de W l'un à la suite de l'autre pour faire une suite extraite

on pose $\varphi(0) = \min(W)$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n+1) = \min\left(W \cap \{p \geq \varphi(n)+1\}\right)$ ($\{p \in \mathbb{N},\ p \geq \varphi(n)+1\}$)

non vide de $\mathbb{N}$

$\min(W) = \varphi(0)$

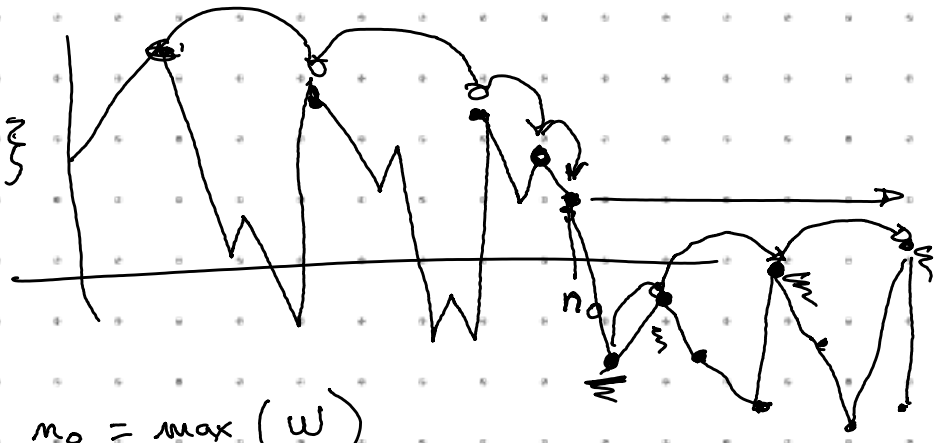
- $u_{\varphi(0)} = \max\left(u_{\varphi(p)}, p \in W\right)$



$(u_{\varphi(n)})$ est une suite extraite de u
elle est décroissante.

2e cas sinon, W est fini :

$W = \{p \in \mathbb{N},\ \forall n \geq p,\ u_n \leq u_p\}$



on pose $n_0 = \max(W)$

$\forall p \geq n_0 + 1,\ p \notin W,\ \exists k \geq p,\ u_k > u_p$

on pose $\varphi(0) = n_0 + 1 \notin W$

$\forall n \in \mathbb{N}$

$\varphi(n+1) = \min\{k \geq \varphi(n) \ ;\ u_k > u_{\varphi(n)}\}$

non vide car $\varphi(n) \notin W$

$\varphi(n+1) \geq \varphi(n)$ par hypothèse

or $u_{\varphi(n+1)} > u_{\varphi(n)}$ donc $\varphi(n+1) \neq \varphi(n)$

donc $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ donc $\varphi(n+1) \geq \varphi(n) + 1$

φ est une fonction d'extraction $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$

par construction $u \circ \varphi$ est croissante (strictement)

Preuve de Bolzano-Weierstraß

Si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on peut en extraire une sous-suite monotone.
or u est bornée, $(u_{\varphi(n)})$ est aussi bornée.

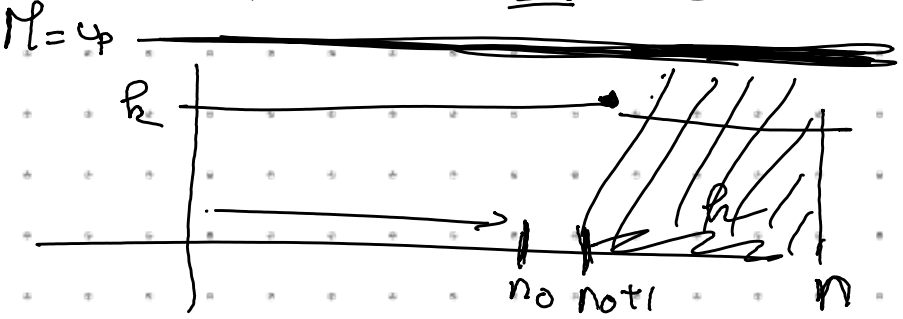
Donc $(u_{\varphi(n)})$ monotone bornée
D'après le théorème de la limite monotone, elle converge.

Exercice : en utilisant le lemme des pics
montrer que si u admet $+\infty$ comme limite en $+\infty$
alors on peut en extraire une sous suite croissante.

1ère idée

$P = \{ k \in \mathbb{N},\ \forall p \leq k,\ u_p \leq u_k \}$

P infini ? par l'absurde si P est fini :
on note $n_0 = \max(P)$
$\forall k \geqslant n_0 + 1$, $k \notin P$
donc $\exists p \leqslant k$, $u_p > u_k$



on pose $M = \max(u_0, u_1, \ldots u_{n_0})$

on prouve par récurrence $\forall k \geqslant n_0 + 1$, $u_k \leq M$

init : $\exists k \in [\![0, n_0]\!]$, $u_{n_0+1} \leq u_k \leq M$
hérédité forte soit $n \geqslant n_0 + 1$
et on suppose que $\forall k \in [\![n_0+1, n]\!]$
$u_k \leq M$
$n+1 \notin P$ donc $\exists p \in [\![0, n]\!]$ $u_p > u_{n+1}$
$u_{n+1} < u_p \leq M$

d'où l'hérédité.

Donc $\forall n \geq n_0+1 \quad u_n \leq M$
donc la suite est bornée à partir d'un certain rang. (donc majorée)
ne peut pas tendre vers $+\infty$ Absurde

2e idée

en utilisant le Lemme des pics

si par l'absurde u n'admet aucune suite extraite croissante, alors elle en admet une décroissante.

$$\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

D'après le théorème de la limite monotone

$$\lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

or $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ donc toutes les suites extraites tendent vers $+\infty$

Absurde