

FRACTIONS RATIONNELLES

A Définitions

Forme irréductible : $F = \frac{P}{Q}$ tel que $P \wedge Q = 1$ et Q unitaire.

Degré : $\deg F = \deg P - \deg Q$,

$$\deg(F_1 + F_2) \leq \max(\deg F_1, \deg F_2), \quad \deg(F_1 F_2) = \deg F_1 + \deg F_2.$$

Pour $F = \frac{P}{Q}$ sous forme irréductible.

- Les **pôles** de F sont les racines de Q .
La **multiplicité du pôle** correspond à la multiplicité de la racine pour Q .
- Les **zéros** de F sont les racines de P .
La **multiplicité du zéro** correspond à la multiplicité de la racine pour P .

B Décomposition sur $\mathbf{C}$

1. partie entière E : $P = EQ + R \Rightarrow F = E + \frac{R}{Q}$ avec $\deg R < \deg Q$.
2. Factoriser Q : $Q = \lambda \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)^{m_i}$.
3. Décomposer la partie fractionnaire : $\frac{R}{Q} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{i,j}}{(X - \alpha_i)^j}$.
4. Trouver les coefficients $a_{i,j}$.

Méthode d'obtention des coefficients :

- Mise au même dénominateur (dernier recours)
- Pour le coefficient de plus grande puissance :

$$- \text{ (évaluation) } a_m = \left((X - \alpha)^m F \right)(\alpha),$$

$$- \text{ (dérivation) } a_m = m! \frac{R(\alpha)}{Q^{(m)}(\alpha)}.$$

$$\text{Pour un pôle simple } a_1 = \frac{R(\alpha)}{Q'(\alpha)}.$$

On peut ensuite trouver les autres coefficients du même pôle de proche en proche en remarquant que pour $P - \frac{a_m}{(X - \alpha)^m}$ α est un pôle de multiplicité inférieure ou égale à $m - 1$, ce qui permet donc de trouver a_{m-1} .

- Évaluation en $\pm\infty$, en α qui n'est pas un pôle, utilisation de la parité de $F, \dots$
- (*somme des résidus*) on pose $s = \sum_{i=1}^n a_{i,1}$,
 - si $\deg \frac{R}{Q} = -1$, alors s est égal à la partie entière de $\frac{XR}{Q}$;
 - si $\deg \frac{R}{Q} < -1$, alors $s = 0$.
- Utiliser la parité ou imparité de la fraction pour avoir des relations entre pôles.
- Si la fraction est dans $\mathbf{R}(X)$, alors ses pôles complexes sont conjugués et de même multiplicité.
Pour α pôle complexe de multiplicité m , on a alors les coefficients de $\frac{1}{(X - \alpha)^k}$ et $\frac{1}{(X - \bar{\alpha})^k}$ conjugués.
- **Pour les pôles de grande multiplicité** on peut utiliser la méthode des divisions euclidiennes successives (mais nécessite des mises au même dénominateur).

C Décomposition sur $\mathbf{R}$

1. partie entière E : $P = EQ + R \Rightarrow F = E + \frac{R}{Q}$ avec $\deg R < \deg Q$.
2. Factoriser Q : $Q = \lambda \prod_{i=1}^q (X - \alpha_i)^{m_i} \prod_{i=1}^r (X^2 + \beta_i X + \gamma_i)^{\mu_i}$.
3. Décomposer la partie fractionnaire :

$$\frac{R}{Q} = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{i,j}}{(X - \alpha_i)^j} + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\mu_i} \frac{b_{i,j}X + c_{i,j}}{(X^2 + \beta_i X + \gamma_i)^j}.$$

4. Trouver les coefficients $a_{i,j}$, pour cela on peut
 - (a) utiliser des méthodes similaires à celles sur $\mathbf{C}$,
 - (b) ne pas hésiter à évaluer le polynôme en des pôles complexes.