

NOMBRES RÉELS

1 ENSEMBLES DE NOMBRES

N les entier naturels 0, 1, 2, 3, 4, ...

Z les entier relatifs ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...

Q les rationnels (quotients de deux entiers) $\frac{1}{4}, \frac{2}{825}, -\frac{5}{3}, 3, 5 = \frac{35}{10}, \dots$

R les réels 0, 5, -4, $\frac{2}{3}, -\frac{3}{7}, \pi, \dots$

C les complexes $3 + 2i, 5i, -2\sqrt{3}(1 + i), 2e^{i\frac{\pi}{6}}, \dots$

- Une **étoile** en exposant si l'ensemble est privé de l'élément 0 : $\mathbf{N}^* = \{n \geq 1\}$
- Un « **plus** » en exposant ou en indice pour les positifs : $\mathbf{R}_+ = \mathbf{R}^+ = [0, +\infty[$, $\mathbf{Z}^+ = \mathbf{N}$, $\mathbf{R}_+^* =]0, +\infty[$.
- Un « **moins** » pour les nombres négatifs (ou nuls) : $\mathbf{R}_- =]-\infty, 0]$.

2 RELATIONS BINAIRES

Une relation binaire sur E est une partie $G \subset \mathcal{P}(E \times E)$.

$$\forall (x, y) \in E^2, x \mathcal{R} y \iff (x, y) \in G.$$

- $\mathcal{R}$ est **réflexive** si $\forall x \in E, x \mathcal{R} x$.
 - $\mathcal{R}$ est **symétrique** si $\forall (x, y) \in E^2, x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$.
 - $\mathcal{R}$ est **antisymétrique** si $\forall (x, y) \in E^2, (x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} x) \Rightarrow x = y$.
 - $\mathcal{R}$ est **transitive** si $\forall (x, y, z) \in E^3, (x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} z) \Rightarrow x \mathcal{R} z$.
- x et y de E sont **comparables** suivant $\mathcal{R}$ si $x \mathcal{R} y$ ou $y \mathcal{R} x$.

Relation **totale** : tous les éléments de E sont comparables, sinon relation **partielle**.

relation d'équivalence :

- réflexive,
- symétrique,
- transitive.

classes d'équivalence :

$$\text{cl}(x) = \dot{x} = \{y \in E, x \mathcal{R} y\}.$$

L'ensemble des classes d'équivalence forme une partition de E .

relation d'ordre :

- réflexive,
- **antisymétrique**,
- transitive.

Relation d'ordre **stricte** $\prec$

$$\forall (x, y) \in E^2,$$

$$x \prec y \iff (x \mathcal{R} y \wedge x \neq y).$$

- **majorant** M de A $\forall x \in A, x \preccurlyeq M$.
- **minorant** m de A $\forall x \in A, m \preccurlyeq x$.
- M est le **plus grand élément** de A si $M \in A$, et $\forall x \in A, x \preccurlyeq M$.
- M est le **plus petit élément** de A si $m \in A$, et $\forall x \in A, m \preccurlyeq x$.
- **borne supérieure** : plus petit majorant (s'il existe)
- **borne inférieure** : plus grand minorant (s'il existe).

Caractérisation de la borne supérieure sur $\mathbf{R}$

Soit A une partie non vide majorée de $\mathbf{R}$,

A admet une borne supérieure et

$$S = \sup A \iff S \text{ est un majorant de } A \text{ et } \forall \varepsilon > 0, [S - \varepsilon, S] \cap A \neq \emptyset.$$

ou, de façon équivalente :

$$S = \sup A \iff S \text{ est un majorant de } A \text{ et } \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, S - \varepsilon \leq x.$$

3 VALEUR ABSOLUE ET PARTIE ENTIÈRE

Parties positives et négatives : $x^+ = \max(x, 0)$ et $x^- = \max(-x, 0)$.
 $\forall x \in \mathbf{R}, x = x^+ - x^-$.

Valeur absolue : $|x| = \max\{x, -x\} = x^+ + x^-$.
 $|xy| = |x| |y|, \quad |x^n| = |x|^n$.

Inégalité triangulaire

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad \left| |x| - |y| \right| \leq |x + y| \leq |x| + |y|.$$

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad \left| |x| - |y| \right| \leq |x - y| \leq |x| + |y|.$$

Partie entière : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, ou $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbf{Z}, n \leq x\}$.
 La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante sur $\mathbf{R}$.