

SEMAINE 05 DU 12/10/2026

1 PROGRAMME OFFICIEL

a) Nombres complexes	
Parties réelle et imaginaire.	La construction de $\mathbf{C}$ est hors programme.
Opérations sur les nombres complexes.	
Brève extension du calcul de $\sum_{k=0}^n x^k$, de la factorisation de $a^n - b^n$, de la formule du binôme.	
Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur.	On identifie $\mathbf{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct (« plan complexe »).
b) Conjugaison et module	
Conjugaison, compatibilité avec les opérations.	Image du conjugué dans le plan complexe.
Module.	Interprétation géométrique de $ z - z' $, cercles et disques.
Relation $ z ^2 = z\bar{z}$, module d'un produit, d'un quotient.	
Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	
c) Nombres complexes de module 1 et trigonométrie	
Identification du cercle trigonométrique et de l'ensemble des nombres complexes de module 1. Définition de e^{it} pour $t \in \mathbf{R}$.	Notation $\mathbf{U}$.
Exponentielle d'une somme.	
Formules d'Euler. Technique de l'angle moitié : factorisation de $1 \pm e^{it}$, de $e^{ip} \pm e^{iq}$.	Les étudiants doivent savoir retrouver les formules donnant $\cos(p) \pm \cos(q)$, $\sin(p) \pm \sin(q)$.
	Linéarisation, calcul de $\sum_{k=0}^n \cos(kt)$ et de $\sum_{k=0}^n \sin(kt)$.
Formule de Moivre.	Les étudiants doivent savoir retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos(t)$ et $\sin(t)$.

d) Forme trigonométrique	
Forme trigonométrique de $re^{i\theta}$ ($r > 0$) d'un nombre complexe non nul. Arguments. Argument d'un produit, d'un quotient.	<i>On veillera, autant que possible, à donner un argument dans $] - \pi, \pi[$.</i>
Transformation de $a \cos(t) + b \sin(t)$ en $A \cos(t - \varphi)$.	
e) Équations algébriques	
Pour P fonction polynomiale à coefficients complexes admettant a pour racine, factorisation de $P(z)$ par $z - a$.	<i>Provisoirement admis, démontré avec le chapitre sur les polynômes.</i>
Résolution des équations du second degré dans $\mathbf{C}$.	Calcul des racines carrés d'un nombre complexe donné sous forme algébrique.
Somme et produit des racines.	
f) Racines n-ièmes	
Description des racines n -ièmes de l'unité, d'un nombre complexe non nul donné sous forme trigonométrique.	Notation $\mathbf{U}_n$. Représentation géométrique.
g) Exponentielle complexe	
Définition de e^z pour z complexe : $e^z = e^{\Re(z)} e^{i \Im(z)}$.	Notations $\exp(z)$, e^z . Module et argument de e^z .
Exponentielle d'une somme.	
Pour tous z et z' dans $\mathbf{C}$, $e^z = e^{z'}$ si, et seulement si $z - z' \in 2i\pi\mathbf{Z}$.	
Résolution de l'équation $e^z = a$.	
h) Interprétation géométrique des nombres complexes	
Interprétation géométrique des modules et arguments de $\frac{c-a}{b-a}$.	Traduction de l'alignement et de l'orthogonalité. Similitudes directes. Cas particuliers : translations, homothéties, rotations.
Interprétation géométrique des applications $z \mapsto az + b$ pour $(a, b) \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}$.	
Interprétation géométrique de la conjugaison.	

2 QUESTION DE COURS :

Exercice 1

« Dé-linéariser » $\cos(n\theta)$ ou $\sin(n\theta)$ pour $\theta \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$. Soit le cas général, soit un cas particulier selon les volontés du colleur.

Exercice 2 (CCINP 84)

- 1) Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
- 2) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbf{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
- 3) En déduire, pour $n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$, les solutions dans $\mathbf{C}$ de l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

Exercice 3 (CCINP 89)

Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geq 2$. On pose $z = e^{i \frac{2\pi}{n}}$.

- 1) On suppose $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.
Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.
- 2) On pose $S = \sum_{k=0}^{n-1} |z^k - 1|$. Montrer que $S = \frac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

3 EXERCICES :

Les nombres complexes et la trigonométrie.