Semaine 27 du 18/05/2026

1 Programme officiel

⚠ *Pas de familles sommables*

a) Convergence et divergence

Sommes partielles d'une série numérique. Convergence, divergence, somme.	La série est notée $\sum u_n$. En cas de convergence, sa somme est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme.	
Le terme général d'une série convergente tend vers 0.	Divergence grossière.
Reste d'une série convergente.	
Lien suite-série.	La suite (u_n) et la série télescopique $\sum(u_{n+1} - u_n)$ sont de même nature.
Séries géométriques : condition nécessaire et suffisante de convergence, somme.	
Relation $\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ pour $z \in \mathbf{C}$.	

b) Séries à termes positifs ou nuls

Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.	
Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ pour tout n, la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$.	
Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont positives et si $u_n \sim v_n$, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.	
Si f est monotone, encadrement des sommes partielles de $\sum f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles.	Application à l'étude de sommes partielles.
Séries de Riemann.	

c) Séries absolument convergentes à termes réels ou complexes

Une série numérique absolument convergente est convergente.	Le critère de Cauchy est hors programme.
Si (u_n) est une suite complexe, si (v_n) est une suite d'éléments de $\mathbf{R}^+$, si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.	

d) Théorème des séries alternées

Si la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge en décroissant vers 0, $\sum(-1)^n u_n$ converge.	Signe et majoration en valeur absolue de la somme, des restes.

2 Exercices à savoir refaire

Exercice 1 (CCINP 5)

1) On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n\,(\ln n)^{\alpha}}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbf{R}$.

   (a) **Cas $\boldsymbol{\alpha \leqslant 0}$**

   En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.

   (b) **Cas $\boldsymbol{\alpha > 0}$**

   Étudier la nature de la série.
   Indication: on pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}$.

2) Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

Exercice 2 (CCINP 6)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels strictement positifs et ℓ un réel positif strictement inférieur à 1.

1) Démontrer que si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors la série $\sum u_n$ converge.

   Indication: écrire, judicieusement, la définition de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

2) Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$?

Exercice 3 (CCINP 7)

1) Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles telles que $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang.

   (a) Prouver que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

   (b) Dans cette question on suppose que (v_n) est positive.
   Prouver que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Rightarrow \sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

2) Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\left((-1)^n + \mathrm{i}\right)\sin\left(\frac{1}{n}\right)\ln n}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)}$.

   Remarque : i désigne le nombre complexe de carré égal à -1.

Exercice 4 (CCINP 8 - simplifié)

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.

   (a) Démontrer que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente.

   (b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.

2) On pose : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n \mathrm{e}^{-nx}}{n}$.

   Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ en fonction de x.

Exercice 5 (CCINP 17-extrait)

On pose:

$$\forall\, n \in \mathbf{N},\ \forall x \in \mathbf{R},\ f_n(x) = nx^2\,\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}.$$

Déterminer les valeurs de $x \in \mathbf{R}$ pour lesquelles la série $\sum f_n(x)$ converge.

Exercice 6 (CCINP 46)

On considère la série:$\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1) Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \alpha\dfrac{\pi}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.

2) En déduire que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.

3) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

3 Exercices de recherche

Sur l'algèbre linéaire : applications linéaire et matrices, matrices équivalentes, semblables, matrices de passage... (pas de déterminant).